O całkach rozwiązań

równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych rzędu 2-go.

Przez

Stanisława Kępińskiego.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 2 stycznia 1893 r.; referent czł. Zajączkowski.

Przedmiotem pracy niniejszej są funkcye, które powstają przez całkowanie rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych rzędu 2-go. Według treści dzieli się ta praca na dwie części.

W pierwszej części (Roz. I, II) zajmuję się istotnie funkcyami, otrzymanemi przez proste całkowanie rozwiązań; chodziło mi tu mianowicie o przebieg tych funkcyi przy dowolnej zmianie zmiennej niezależnej. Do tego celu, jak wogóle do każdego badania, nadają się szczególniej funkcye jednowartościowe zmiennej. Tym powodowany, wprowadziłem do rozważania jako zmienną niezależną $\frac{y_1}{y_2} = \eta(z)$, iloraz rozwiązań równania i zająłem się określeniem takich równań różniczkowych, aby owe funkcye całkowe były rzeczywiście funkcyami jednowartościowemi zmiennej η. Dlatego należało naprzód w rozdziale I rozważyć bliżej same równania, funkcyę $\eta(z)$ i odwrotną jej funkcyę automorficzną $z(\eta)$, która przedewszystkiem przy powyższych założeniach powinna być funk-

cyą jednowartościową. Nie chcąc przerywać rozumowania nieustannem odwoływaniem się do bardzo licznych prac, odnoszących się do tego przedmiotu, zresztą wielce porozrzucanych, podaję w rozdziale I (uwzględniając literaturę) najgłówniejsze własności tak równań różniczkowych jak i funkcyi automorficznych. Oparłem się zaś przytem na pracach Fuchsa, Poincarégo, Kleina, szczególnie zaś na wykładach tego ostatniego: „O równaniach różniczkowych“, które miał w Getyndze w latach 1890 i 1891. Podnoszę to tutaj wyraźnie, tem bardziej, że dla krótkości w tekście odpowiednich cytat nie robię.

Załatwiwszy się z bliższem określeniem równań, zajmuję się w rozdziale II badaniem grupy owych funkcyi całkowych. Przy wspomnianych założeniach grupa ta okazała się izomorficzną względem grupy równań różniczkowych i grupy funkcyi η. Stąd zaś wyniknęły pewne związki liniowe jednorodne między stałemi grupy; dokładne jednak określenie tych stałych przeprowadzam tylko na szczególnym przykładzie. Dla tego przykładu wyprowadzam wzory, służące do stopniowego obliczenia stałych i przy końcu podaję owe stałe w postaci wyraźnej funkcyi spotykanych w teoryi liczb.

Nadmienię tu jeszcze, że przy podstawieniach grupy funkcyi całkowych nie zmieniają się odwrotne tym ostatnim funkcye, których określaniem zajmował się Fuchs w latach 1880, 1881 i następnych (Göttinger Nachrichten 1880; Crelle's Journal 89; str. 151 i nast., i t. d.). Dla zbadania więc dokładnego także tych funkcyi — o ile one istnieją — wydaje się pożądaną znajomość bliższa owych grup.

Część druga tej pracy, którą stanowi rozdział III, jest poświęcona funkcyom, które przy pomocy rozwiązań pewnych równań różniczkowych podobnie są zbudowane i podobne własności posiadają jak całki Abelowe trzeciego gatunku. Funkcyami temi zajmowali się poprzednio Abel, Jacobi, Fuchs i Frobenius. Tutaj zadaniem mojem było ująć te funkcye w inną dogodną formę całek podwójnych — taką, jaką nadał Klein (wychodząc z badań Weierstrassa) całkom hypereliptycznym trzeciego gatunku. W ustępie pierwszym rozdziału III podaję obszerniej historyę tego przedmiotu, i omawiam otrzymane przeze mnie wyniki.

Zaznaczyć jeszcze muszę, że na istnienie owych funkcyi i na przypuszczalną możliwość ich przekształcenia zwrócił moję uwagę profesor Klein w Getyndze, z którego cennych rad miałem niejednokrotnie sposobność korzystać.

ROZDZIAŁ I.

Równania różniczkowe i funkcye automorficzne.

Za podstawę rozważań służyć będą równania różniczkowe jednorodne, rzędu 2-go, należące do klasy równań określonych przez Fuchsa w tomie 66-ym dziennika Crelle'a [1]). Dla systematyczności i aby uniknąć powtarzania się, przedstawię krótko główne — zresztą znane — własności tych równań.

Oznaczając przez p i q spółczynniki równania, przez $y^{(k)}$ zaś ktą pochodną funkcyi y względem zmiennej niezależnej z, napiszemy to równanie w kształcie:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

O spółczynnikach p i q zakładamy, iż są funkcyami algebraicznemi wymiernemi. Na szczególniejszą uwagę zasługują punkty $z = e_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) płaszczyzny zmiennej z, w których owe spółczynniki otrzymują wartości nieskończenie wielkie. W istocie, jak zaraz zobaczymy, zachowują się w tych punktach całki równania (1) wyjątkowo, w skutek czego owe punkty nazywają się punktami osobliwymi równania. W przeciwstawieniu do tego, każdy inny punkt nazywa się punktem zwyczajnym.

Owoż okazało się [2]), że w okolicy każdego punktu zwyczajnego istnieją dwie całki równania (1) od siebie liniowo niezależne, tworzące t. z. układ zasadniczy i pozwalające się przedstawić za pomocą szeregów:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \ldots \\ y_2 &= b_0 + b_1 (z-z_0) + b_2 (z-z_0)^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

pod warunkiem, że

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 \gtrless 0.$$

Całka ogólna równania wyraża się przez:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

[1]) Fuchs: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, str. 121 i następ.; Zob. także Zajączkowski: Pamiętnik Wydziału mat.-przyrodn. Akad. Umiej., tom XIII.

[2]) Własność ta znana była już Cauchy'emu.

gdzie c_1, c_2 są stałemi dowolnemi. Zakładając, że całki równania (1) nie powinny posiadać tak zwanych przez Weierstrassa punktów istotnie osobliwych, znalazł Fuchs, że w okolicy punktów osobliwych e_i, zawsze istnieje układ całek zasadniczych, które można przedstawić przez szeregi:

$$\begin{aligned} y_1 &= (z-e_i)^{k'_i}\left[a_0 + a_1(z-e_i) + a_2(z-e_i)^2 + \dots\right],\ a_0 \gtrless 0 \\ y_2 &= (z-e_i)^{k''_i}\left[b_0 + b_1(z-e) + b_2(z-e_i)^2 + \dots\right],\ b_0 \gtrless 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Liczby k'_i, k''_i nazywają się **wykładnikami** należącymi do punktu osobliwego e_i. W razie, gdy różnica wykładników $\lambda_i = k'_i - k''_i$ jest liczbą całkowitą lub zerem, całki owe dają się przedstawić zapomocą szeregów:

$$\begin{aligned} y_1 &= (z-e)^{k'_i}\left[a_0 + a_1(z-e_i) + a_2(z-e_i)^2 + \dots\right] \\ y_2 &= (z-e_i)^{k''_i}\left[b_0 + b_1(z-e_i) + b_2(z-e_i)^2 + \dots\right] + c y_i \log(z-e_i). \end{aligned} \tag{4}$$

W celu zbadania własności całek w okolicy punktu $z=\infty$ podstawiamy, jak wiadomo, $z = \frac{1}{z'}$ i rozwijamy funkcye y_1, y_2 w okolicy punktu $z'=0$. Stąd wprost wynika, że, jeżeli punkt $z=\infty$ jest punktem zwyczajnym, to:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \\ y_2 &= b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \end{aligned} \qquad \text{gdzie } a_0 b_1 - a_1 b_0 \gtrless 0; \tag{2'}$$

jeżeli zaś punkt $z=\infty$ jest punktem osobliwym, to:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{1}{z}\right)^{k'}\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right] \\ y_2 &= \left(\frac{1}{z}\right)^{k''}\left[b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots\right] \end{aligned}\right\},\ a_0,\ b_0 \gtrless 0.$$

Korzystając z powyższych własności, możemy równaniu różniczkowemu (1) nadać kształt o wiele dogodniejszy.

Założyliśmy, że p, q są funkcyami wymiernemi i przypuściliśmy, że całki równania nie posiadają punktów istotnie osobliwych.

Z tego ostatniego warunku wynika, że:

$$\lim\left[(z-e_i)\,p\right]_{z=e_i}\ ,\quad \lim\left[(z-e_i)^2\,q\right]_{z=e_i}$$

posiadają wartości skończone. Stąd zaś okazuje się, że p i q mają kształt:

$$(5) \qquad p=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{c_i}{z-e_i},\quad q=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-e_i)}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{c'_i}{z-e_i}+G_{n-2}(z)\right)$$

gdzie c_i, c'_i są liczbami stałemi, a $G_{n-2}(z)$ jest funkcyą całkowitą zmiennej z stopnia $(n-2)$-go:

$$G_{n-2}(z)=A\,z^{n-2}+B\,z^{n-3}+\ldots+N.$$

Aby wyznaczyć stałe c_i, c'_i, podstawmy w równaniu (1)

$$y=(z-e_i)^{k_i}\,[a_0+a_1(z-e_i)+\ldots]$$

i uwzględnijmy wyrażenia (5). Spółczynnik najniższej potęgi tak otrzymanego wyrażenia, przyrównany do zera, przedstawi nam tak zwane r ó w n a n i e c h a r a k t e r y s t y c z n e:

$$k_i(k_i-1)+k_i c_i+\frac{c'_i}{(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_{i-1})(e_i-e_{i+1})\ldots(e_i-e_n)}=0,$$

którego pierwiastkami są właśnie wykładniki k'_i, k''_i należące do punktu osobliwego e_i. Stąd wynika, że:

$$c_i=1-k'_i-k''_i$$

$$c'_i=k'_i\,k''_i\,(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n).$$

Podstawiając zaś w (1) $z=\frac{1}{z'}$ i postępując podobnie jak poprzednio, otrzymamy dla punktu w nieskończoności $(z=\infty)$ równanie charakterystyczne:

$$k^2+[1-n+\sum_{i=1}^{i=n}(k'_i+k''_i)]\,k+A=0.$$

Jeżeli więc k', k'' oznaczają, jak poprzednio, wykładniki należące do tego punktu, to:

$$k'+k''+\sum_{i=1}^{i=n}(k'_i+k''_i)=n-1$$

$$k'.k''=A;$$

równanie więc (1) przejdzie na:

$$(6)\quad y''+y'\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1-k_i'-k_i''}{z-e_i}+$$

$$+\frac{y}{\prod_{i=1}^{i=n}(z-e_i)}\left[\sum_{i=1}^{i=n}\frac{k'_i k''_i\,(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n)}{z-e_i}+k'\,k''\,z^{n-2}+Bz^{n-3}+\ldots+N\right]=0,$$

gdzie

$$k'+k''+\sum_{i=1}^{i=n}(k'_i+k''_i)=n-1.$$

Jeżeli punkt w nieskończoności ($z=\infty$) jest punktem zwyczajnym to $k'=1$, $k''=0$. Nadto zauważymy, że warunkiem, aby nie występowały logarytmy w rozwinięciach całek w okolicy tego punktu [1]), jest jeszcze $B=0$. W tym więc przypadku równanie (6) przybiera kształt:

$$(7)\quad y''+y'\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1-k'_i-k''_i}{z-e_i}+$$

$$+\frac{y}{\prod_{i=1}^{i=n}(z-e_i)}\left[\frac{k'_i\,k''_i\,(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n)}{z-e_i}+A'z^{n-4}+\ldots+N'\right]=0$$

z warunkiem, że

$$\sum_{i=1}^{i=n}(k'_i+k''_i)=n-2. \tag{8}$$

Podstawiając w równaniu (6) $(n-1)$ zamiast n, otrzymamy równanie różniące się od równania (7) tylko tem, że jeden z punktów osobliwych, n. p. e_n, znajduje się w nieskończoności; otrzymane więc równanie jest tylko szczególnym przypadkiem równania (4). Brak zaś wszelkiej istotnej różnicy między temi równaniami objaśnia twierdzenie:

l e w a s t r o n a r ó w n a n i a (7) p o s i a d a w z g l ę d e m p o d s t a w i e n i a l i n i o w e g o:

$$z=\frac{az'+b}{cz'+d},\quad ad-bc\gtrless 0$$

c e c h ę n i e z m i e n n ą.

Jakoż, geometrycznie przedstawia to podstawienie odtworzenie płaszczyzny, lub lepiej kuli zmiennej z na siebie samą. Wskutek tego

---

[1]) Fuchs, Crelle's Journ. Bd. 68, str. 374—378; Frobenius, Crelle's Journ. Bd. 76, str. 224—226.

zmienią tylko punkty osobliwe swoje położenie, wszystkie zaś inne stałe równania (7) pozostaną bez zmiany.

Z własności tej wynika bezpośrednio, że, bez naruszenia ogólności, możemy zawsze trzem punktom osobliwym nadać położenie dowolne, i naprzykład możemy jeden z nich przenieść do nieskończoności. Zważając na tę własność widzimy również, że za stałe wyznaczające równanie (7) nie należy uważać oddzielnych n wielkości e_i, lecz tylko $(n-3)$ z nich, albo raczej $(n-3)$ ich stosunków podwójnego podziału. Tak więc stałemi równania (7) są:

a) $(n-3)$ stosunków podwójnego podziału punktów osobliwych e_i,

b) $2n$ wykładników $k'_i\, k''_i$,

c) $(n-3)$ stałych dowolnych $A', B', \ldots, N'$, które według Kleina nazwiemy parametrami akcesorycznymi równania.

Razem $4n-6$ stałych.

Tyle co do kształtu równania różniczkowego. Jeszcze kilka słów powiemy o zachowaniu się całek tegoż równania. Na płaszczyźnie zmiennej z poprowadźmy z dowolnego (ale zwyczajnego) punktu z_0 linie wzajem się nieprzecinające: L_i do punktów e_i. Linie te nazywać będziemy przecięciami. W punkcie z_0 istnieją, jak widzieliśmy, zawsze dwie całki od siebie liniowo niezależne, tworzące układ zasadniczy i pozwalające się przedstawić w okolicy tegoż punktu zapomocą szeregów (5). Szeregi te nazywamy według Weierstrassa elementami początkowymi funkcyi y_1, y_2. Jeżeli zmiennej z pozwolimy poruszać się dowolnie w swej płaszczyźnie, jednak tak, aby nie przekraczała linii L_i, to z elementów początkowych otrzymamy dalsze elementy funkcyi y_1, y_2. Zbiór wszystkich elementów w ten sposób otrzymanych tworzy gałęzie funkcyi y_1, y_2, które nazywamy gałęziami początkowemi. Każdą inną gałąź, (a jest ich wogóle mówiąc nieskończenie wiele), otrzymamy z gałęzi początkowych, pozwalając zmiennej z przekraczać poprowadzone linie L_i i wykonywać obiegi około punktów osobliwych; punkty więc te są zarazem punktami rozgałęzienia naszych funkcyi. Jeżeli gałęzie otrzymane z gałęzi początkowych y_1, y_2 wskutek obiegu około punktu osobliwego e_i nazwiemy y'_1, y'_2, to według Fuchsa istnieją związki:

$$(9) \qquad A_i) \quad \begin{aligned} y'_1 &= \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 \\ y'_2 &= \gamma_i y_1 + \delta_i y_2, \end{aligned}$$

których wyznacznik

$$\Delta_i = \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i \gtrless 0.$$

Powiemy więc: przy obiegu zmiennej z około punktu osobliwego e_i ulegają gałęzie y_1, y_2 podstawieniom liniowym, których wyznacznik jest różny od zera.

Takich różnych podstawień jest oczywiście n, to jest tyle, ile jest punktów osobliwych. Lecz z uwagi, że po obiegu około wszystkich punktów osobliwych powrócimy znowu do punktu wyjścia z wartościami początkowemi y_1, y_2 wynika, że podstawienia te są z sobą związane zapomocą równości

$$A_1 A_2 \ldots A_n = 1, \tag{10}$$

której lewa strona przedstawia symbolicznie szereg po sobie wykonywanych podstawień A_i.

Oczywiście, że wszystkie gałęzie funkcyi y_1, y_2, do których możemy wogóle dojść przez obiegi zmiennej z około punktów osobliwych, otrzymamy, wykonywając po sobie w dowolnym porządku podstawienia A_i. Wskutek tego te podstawienia nazywają się podstawieniami rodzącemi. Zbiór zaś wszystkich w ten sposób otrzymywanych podstawień tworzy grupę równania różniczkowego, którą stale oznaczać będziemy literą Γ.

§. 2.

Własności równań w poprzednim ustępie przytoczone posłużą jako przygotowanie do omówienia własności funkcyi $\frac{y_1}{y_2} = \eta(z)$ i funkcyi automorficznej $z(\eta)$. Poruszymy tym sposobem zakres nowszej teoryi funkcyi stanowiący przedmiot licznych i rozległych badań, które dzięki pracom Poincarégo i Kleina zajęły od razu w nauce poważne stanowisko i znalazły liczne zastosowania.

Z badań tych uwzględnimy tutaj tylko część ich nieznaczną. Chodzić nam mianowicie będzie tylko o te główne własności powyższych funkcyi, które nam w dalszym ciągu okażą się potrzebnemi.

Zamiast rozważać funkcye y_1, y_2 z osobna, weźmy pod rozwagę ich iloraz:

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}.$$

Z zachowania się całek y_1, y_2 na płaszczyźnie zmiennej z wnosimy wprost o zachowaniu się funkcyi η na tejże płaszczyźnie. A mianowicie: η jest w ogóle mówiąc wielo- albo dokładniej nieskończenie wielowartościową funkcyą zmiennej z.

Najogólniejszem jej wyrażeniem jest:

$$\frac{a\eta+b}{c\eta+d},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami stałemi dowolnemi, takiemi, że

$$ad-bc\gtrless 0.$$

Podobnie jednak jak poprzednio, zwrócimy uwagę tylko na te gałęzie funkcyi η, które można otrzymać z jednej raz obranej gałęzi przez obiegi zmiennej z około punktów osobliwych. Jako taką gałąź początkową przyjmiemy iloraz gałęzi początkowych y_1, y_2. Wówczas wszystkie gałęzie powyżej określone funkcyi η, są związane z początkową zapomocą podstawień liniowych

$$(11) \qquad A) \quad \eta'=\frac{\alpha'\eta+\beta'}{\gamma'\eta+\delta'} \quad \alpha'\delta'-\beta'\gamma'\gtrless 0,$$

tworzących grupę podstawień. Grupę tę oznaczać będziemy przez literę Γ. Jej podstawieniami rodzącemi są podstawienia

$$(12) \qquad A'_i) \quad \eta'=\frac{\alpha'_i\eta+\beta'_i}{\gamma'_i\eta+\delta'_i} \quad \alpha'_i\delta'_i-\beta'_i\gamma'_i\gtrless 0,$$

związane ze sobą zapomocą równości:

$$(13) \qquad A'_1\,A'_2\,\ldots\,A'_n=1.$$

Zauważymy tu jeszcze, że każde z tych podstawień rodzących zawiera trzy stałe $\alpha'_i:\beta'_i:\gamma'_i:\delta'_i$, tak, iż w grupie Γ' zachodziłoby $3n$ stałych. Z uwagi jednak na ostatnią równość i na to, że charakter grupy się nie zmieni, jeżeli zamiast η wprowadzimy $\frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ wynika, iż ilość tych stałych grupy redukuje się do $3n-6$.

Geometrycznie przedstawiają, jak wiadomo, podstawienia liniowe (11), odtworzenie płaszczyzny η na siebie samą. Przy tem odtworzeniu przechodzą koła na płaszczyźnie znowu w koła i kąty pozostają zachowane tak co do wielkości, jak co do kierunku, w którym je liczyć raz postanowiliśmy. Podstawienia więc te wyrażają analitycznie powinowactwo kołowe (Möbiusa), a mianowicie w przeciwstawieniu do podstawień, przy których kierunki liczenia kątów ulegają zmianie, noszą nazwę podstawień rodzaju pierwszego. Według Kleina, dzielimy te podstawienia na podstawienia eliptyczne, hyperboliczne, loxodromiczne i paraboliczne. Podstawienia należące do trzech pierwszych

poddziałów posiadają dwa punkty stałe m_i i n_i, przy których pomocy można owe podstawienia przedstawić w formie kanonicznej:

$$\frac{\eta'-m_i}{\eta'-n_i}=\rho\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}. \tag{14}$$

Owóż podstawieniami eliptycznemi nazywamy te, dla których mod $\rho=1$ a więc $\rho=e^{i\varphi}$, podstawieniami hyperbolicznemi takie, dla których ρ jest liczbą rzeczywistą, dla podstawień zaś loxodromicznych ρ jest liczbą zespoloną (mod $\rho\gtrless 1$).

Nakoniec podstawienia paraboliczne stanowią przejście między podstawieniami eliptycznemi i hyperbolicznemi, posiadają tylko jeden punkt stały i można je przedstawić w postaci

$$\frac{1}{\eta'-m}=\frac{1}{\eta-m}+N, \tag{15}$$

gdzie N jest liczbą stałą.

Z rozwinięć funkcyi y_1 i y_2 na szeregi (§. 1) wynikają bez żadnych trudności następujące przedstawienia funkcyi η w okolicy oddzielnych punktów.

Jeżeli przez η_0 nazwiemy wartość funkcyi η w punkcie zwyczajnym $z=z_0$, to

$$\eta-\eta_0=(z-z_0)\,(a_0+a_1\,(z-z_0)+a_2\,(z-z_0)^2+\ldots), \tag{16}$$

gdzie $a_0\gtrless 0$ [1]).

Zachowując znaczenie powyższe liczb m_i, n_i, mieć będziemy w okolicy punktu osobliwego e_i:

$$\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}=(z-e_i)^{\lambda_i}\,(b_0+b_1\,(z-z_0)+\ldots), \tag{17}$$

gdzie $b_0\gtrless 0$, a $\lambda_i=k'_i-k''_i$.

Nakoniec jeżeli przez η_∞ oznaczymy wartość η w punkcie $z=\infty$, to w przypadku, gdy ten punkt jest punktem zwyczajnym, co nadal przyjmujemy, jest:

$$\eta-\eta_\infty=\frac{1}{z}\Big(c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots\Big), \tag{18}$$

gdzie $c_0\gtrless 0$.

---

[1]) Oczywiście spółczynniki a, b... są inne niż spółczynniki w równ. (2).

[Gdyby $z=\infty$ był punktem osobliwym, to

$$(19)\qquad \eta-\eta_\infty=\left(\frac{1}{z}\right)^{\lambda}\left(d_0+\frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\dots\right)$$

gdzie $d_0 \gtrless 0$, a $\lambda=k'-k''$].

Z rozwinięć tych bezpośrednio wynika, iż punkty osobliwe e_i równania różniczkowego są (wogóle mówiąc) punktami rozgałęzienia także funkcyi η.

Przy pomocy powyższych własności funkcyi η nie trudno jest zbudować równanie różniczkowe, któremu ona czyni zadość. Ponieważ najogólniejsze wyrażenie tej funkcyi

$$\frac{a\eta+b}{c\eta+d}$$

zawiera trzy stałe dowolne $a:b:c:d$, żądane więc równanie różniczkowe będzie rzędu trzeciego. Cechą tego równania będzie oczywiście to, iż przy powyższem podstawieniu pozostaje niezmiennem. Szukając takiego niezmiennego wyrażenia

$$F(\eta, \eta', \eta'', \eta''')$$

znalazł Schwarz [1]), iż

$$F=\frac{\eta'''}{\eta'}-\tfrac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2.$$

Wyrażenie to nazwał Cayley s c h w a r z y a n e m, oznaczać je będziemy zapomocą symbolu, wprowadzonego przez Kleina: $[\eta]_z$. Z własności schwarzyanu jako niezmiennika, okazuje się, iż, jako funkcya zmiennej z, nie zmienia się przy obiegach tejże około punktów osobliwych, a przeto: schwarzyan $[\eta]_z$ jest funkcyą jednowartościową zmiennej z. Nadto rozwijając $[\eta]_z$ przy pomocy wzorów (16), (17), (18), na szereg w okolicy oddzielnych punktów, otrzymamy: dla punktu osobliwego $z=e_i$:

$$[\eta]_{z=e_i}=\frac{\frac{1-\lambda_i^2}{2}}{(z-e_i)^2}+\frac{a_0}{z-e_i}+a_1+a_2(z-e_i)+\dots;$$

w okolicy zaś punktu $z=\infty$

$$[\eta]_{z=\infty}=\frac{1}{z^4}\left(b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\dots\right).$$

[1]) Schwarz: Ueber diejenigen Fälle, in welchen etc., Crelle's Journ. tom 75 str. 299 i nast.

Schwarzyan zatem jest funkcyą zmiennej zespolonej z jednowartościową i nieposiadającą punktów istotnie osobliwych, lecz tylko skończoną ilość biegunów. Funkcya taka może być tylko funkcyą wymierną algebraiczną, której biegunami są punkty osobliwe e_i. Korzystając z ostatnich rozwinięć na szeregi, nietrudno jest tę funkcyę utworzyć; otrzymamy mianowicie:

$$(20)\quad [\eta]_z = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-e_i)}\left[\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\frac{1-\lambda_i^2}{2}}{(z-e_i)}(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n)+Az^{n-4}+Bz^{n-5}+\ldots+N\right].$$

Związek ten przedstawia nam właśnie żądane równanie różniczkowe, którego całką jest funkcya η.

Zauważymy tu jeszcze, iż stałemi tego równania są:

n liczb $\lambda_i = k'_i - k''_i$, $n-3$ stosunków podwójnego podziału wielkości e_i, oraz $n-3$ parametrów akcesorycznych: $A, B, \ldots, N$; razem $3n-6$ stałych, t. j. dokładnie tyle, ile wynosi liczba stałych grupy Γ' funkcyi η.

Powiedzieliśmy poprzednio, że, aby pewną gałąź funkcyi y odosobnić, prowadzimy na płaszczyźnie zmiennej z z dowolnego zwyczajnego punktu z_0 do punktów osobliwych linie L_i, których przekraczać nie wolno. Toż samo stosuje się do funkcyi η. Dla jasności wyobraźmy sobie, żeśmy płaszczyznę z wzdłuż tych linii L_i rozcięli; wówczas napewno do tak rozciętej płaszczyzny należeć będzie jedna gałąź funkcyi η. Zachodzi pytanie jaki obraz tak rozciętej płaszczyzny z przedstawia się na płaszczyźnie η?

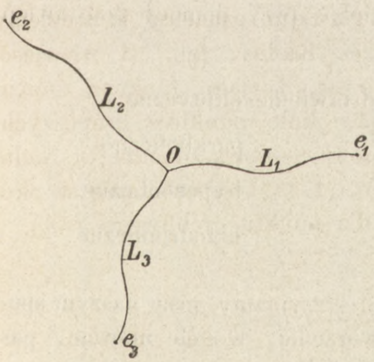


Fig. 1.

Zauważmy naprzód, że w okolicy punktu zwyczajnego z_0 jest funkcya η przedstawiona zapomocą szeregu potęgowego, posiadającego wykładniki całkowite począwszy od jedności. Stąd widoczna, że obszar punktu zwyczajnego z_0 odtworzy się na obszar punktu η_0 taki, iż zupełnemu obiegowi około punktu z_0 odpowie jeden zupełny obieg około punktu η_0. Toż samo zachodzi w okolicy punktu $z=\infty$ gdy założymy, że nie jest punktem osobliwym, cośmy zresztą przyjęli.

Inaczej się rzecz przedstawia w punktach osobliwych. W okolicy tych punktów mieliśmy rozwinięcie na szereg:

$$\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}=(z-e_i)^{\lambda_i}(a_0+a_1(z-e_i)+\ldots).$$

Zawsze możemy wybrać taką gałąź, iż część rzeczywista różnicy $\lambda_i=k_i'-k_i''$ jest liczbą większą lub równą zeru, tak, iż gdy

$$\lambda_i=\lambda_i'+i\lambda_i'', \quad \text{to } \lambda_i' \gtrless 0.$$

Z rozwinięcia na szereg wynika, iż punktowi położonemu w blizkości punktu osobliwego e_i odpowiada na płaszczyźnie η punkt położony w blizkości m_i. Podstawiając zaś

$$z-e_i=re^{i\varphi},$$

$$\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}=\rho e^{i\psi},$$

otrzymamy

$$\psi=\lambda_i'.\varphi.$$

Obiegowi więc zupełnemu około punktu osobliwego odpowiada λ_i' obiegów około punktu m_i; innemi słowy: obrazem obszaru punktu osobliwego jest obszar punktu m_i zawarty między ramionami kąta $2\lambda_i'\pi$.

Ramiona tego kąta przechodzą w siebie przy pomocy podstawień (14, 15) i mianowicie, jeżeli

α) $\lambda_i'>0$ $\lambda_i''=0$ mamy podstawienie eliptyczne

β) $\lambda_i'=0$ $\lambda_i''=0$ „ „ paraboliczne

γ) $\lambda_i'=0$ $\lambda_i''\gtrless 0$ „ „ hyperboliczne

δ) $\lambda_i'>0$ $\lambda_i''\gtrless 0$ „ „ loxodromiczne.

Zaznaczymy tu, że w przypadku γ) otrzymamy przy naszym sposobie przecięcia płaszczyzny, jako odtworzenie, wogóle mówiąc, pas wijący się nieskończenie wiele razy.

Obejmując teraz całość odtworzenia, widzimy, że jako obraz płaszczyzny z otrzymamy na płaszczyźnie η pole wieloboku (Fig. 2), posiadającego następujące własności:

1) Wielobok nasz jest $2n$-bokiem o łączności pojedynczej.

2) Wierzchołki tego wieloboku dzielą się na dwie klasy. Do pierwszej należą te, które są obrazem punktu z_0, z któregośmy prowa-

dzili linie L_i; na Fig. 2. oznaczyliśmy je przez litery $\eta_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Do klasy drugiej zaliczamy te wierzchołki: m_i, które są odtworzeniem punktów osobliwych.

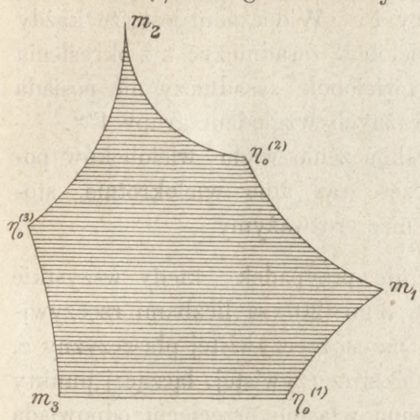


Fig. 2.

3) Suma kątów w wierzchołkach $\eta_0^{(i)}$ równa się 2π, kiedy zakładamy, że punkt z_0 jest punktem zwyczajnym, co tu właśnie przyjmujemy.

4) Kąty w wierzchołkach m_i są równe $2\lambda_i'\pi$.

5) Pary boków wieloboku wychodzących z wierzchołków $\eta_0^{(i)}$, przechodzą w siebie przy podstawieniach A_i'. Wielobok ten nazywa się wielobokiem zasadniczym.

Zależnie od tego, czy funkcya η przyjmuje dla punktów płaszczyzny z wartości nieskończenie wielkie czy też nie, pole naszego wieloboku przechodzi przez punkt $\eta = \infty$ albo nie. Nadto, jeżeli $\lambda_i' > 1$ mogą w wierzchołkach m_i powstawać punkty, posiadające ten sam charakter, co punkty rozgałęzienia powierzchni Riemanna a wskutek tego pole wieloboku może być wielokrotnie pokryte. Zauważymy już jednak z góry, że w dalszym ciągu wyłącznie mieć będziemy do czynienia z wielobokiem, którego pole na siebie nie zachodzi; z tegoto także względu wyłączamy z rozważania przypadek γ.

Nakoniec wypada jeszcze kilka słów powiedzieć o kształcie boków wieloboku. Kształt ten, zależy oczywiście od sposobu przecięcia płaszczyzny z, t. j. od kształtu linii L_i. Przez odpowiedni jednak dobór tych linii zawsze do tego można doprowadzić, że bokami wieloboku będą łuki kół. Wielobok zaś ograniczony kołami jest z tego względu do rozważania dogodnym, że, jak zauważyliśmy przy podstawieniach liniowych (o których jeszcze niżej pomówimy), koła znowu przechodzą w koła. Nadal więc boki wieloboku przyjmować będziemy zawsze jako łuki kół.

Dotąd mówiliśmy o odtworzeniu płaszczyzny z za pomocą jednej (początkowej) gałęzi funkcyi η. Inne gałęzie tej funkcyi otrzymujemy, jak wiadomo, z początkowej, przez wykonywanie na tejże podstawień grupy Γ'. Punkty więc wieloboku, przedstawiającego odtworzenie płaszczyzny z za pomocą dalszych gałęzi, powstają z punktów wieloboku zasadniczego przy pomocy podstawień grupy Γ'. Punkty takie nazywają

się punktami z sobą **równoważnymi**, wieloboki zaś wielobokami z sobą **równoważnymi względem grupy** Γ'. Widocznem jest, że każdy z tych wieloboków służyć może za wielobok zasadniczy; a z określenia ich wynika ta główna własność, że „wielobok zasadniczy nie posiada w swem polu punktów z sobą równoważnych względem grupy Γ'“.

Zbiór tych, wogóle mówiąc, nieskończenie wielu wieloboków pokryje płaszczyznę η lub tylko jej część raz albo wielokrotnie, stosownie do pewnych warunków, które niżej rozważymy.

Na szczególniejszą uwagę zasługuje przypadek, kiedy wszystkie $3n - 6$ spółczynników równania rzędu 3-go (20) są liczbami rzeczywistemi. Wówczas punkty osobliwe leżą na osi rzeczywistej płaszczyzny z, i jako przecięcia możemy użyć odcinka osi rzeczywistej, łączącej punkty $e_1\, e_2 \ldots e_n$. Nietrudno okazać, że temu właśnie przecięciu odpowiada wielobok otoczony kołami.

Jakoż z uwagi, że równanie (20) posiada spółczynniki rzeczywiste, wynika, iż, dobierając stałe całkowania rzeczywiste, możemy dla punktów któregokolwiek z odcinków $e_i\, e_i + 1$ przedstawić pewną gałąź funkcyi η za pomocą szeregu potęgowego, posiadającego spółczynniki rzeczywiste. Że zaś każda inna gałąź jest związana z gałęzią raz obraną przez podstawienie liniowe, z drugiej zaś strony prosta przechodzi przy tem podstawieniu w koło (wogóle), twierdzenie więc powyższe jest okazane.

Stosownie do naszego rozcięcia płaszczyzny z jest wielobok zasadniczy $(2n-2)$-bokiem (Fig. 3), posiadającym we wierzchołkach m_1

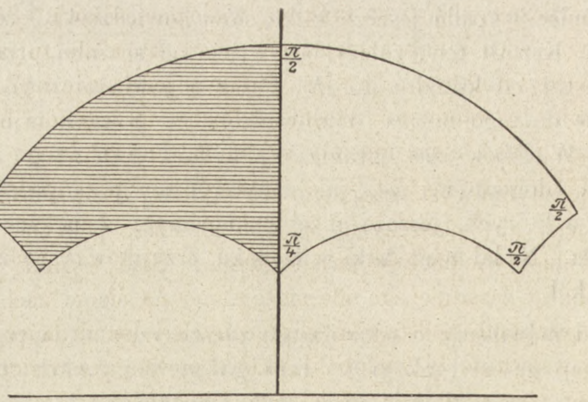


Fig. 3.

i m_n kąty odpowiednio $2\lambda_1\pi$, $2\lambda_n\pi$, w pozostałych zaś wierzchołkach m_i i m_i' kąty $\lambda_i\pi$.

Uzupełniając przecięcie odcinkiem $e_n e_1$, podzielimy płaszczyznę z na połowy z sobą symetryczne. Temu podziałowi płaszczyzny odpowiada następujący podział wieloboku zasadniczego. Jeżeli obierzemy taką gałąź funkcyi η, którąby odcinek $e_n e_1$ odtwarzała na odcinek $m_n m_1$ osi rzeczywistej η, to, ponieważ szereg przedstawiający tę gałąź posiada spółczynniki rzeczywiste, punktom z_0, symetrycznym względem osi rzeczywistej na płaszczyźnie z, odpowiadać będą punkty symetryczne względem osi rzeczywistej na płaszczyźnie η. Wskutek tego odcinek m_1 m_n dzieli wielobok zasadniczy na połowy symetryczne z sobą w zwykłem tego słowa znaczeniu. Ogólnie więc wielobok $(m_1 \ldots m_n \ldots m_1)$ można podzielić zapomocą pewnego koła, przechodzącego przez m_1 i m_n na części względem tego koła symetryczne.

§. 3.

W ustępie tym zajmiemy się z kolei funkcyą odwrotną funkcyi η, t. j. funkcyą $z(\eta)$. Z uwagi, że przy obiegu zmiennej z około punktu osobliwego e_i funkcya η ulega jednemu z podstawień grupy Γ' wynika bezpośrednio, iż w punktach z sobą równoważnych na płaszczyźnie η, otrzymuje funkcya $z(\eta)$ też samą wartość, a więc innemi słowy: funkcya $z(\eta)$ pozostaje bez zmiany przy podstawieniach grupy Γ'. I tejto własności charakterystycznej zawdzięcza funkcya $z(\eta)$ nazwę nadaną jej przez Kleina: „funkcya automorficzna“.

Ponieważ zbiór wieloboków zasadniczych pokrywa płaszczyznę η albo jej część wogóle wielokrotnie, więc także, wogóle mówiąc, funkcya automorficzna $z(\eta)$ jest funkcyą wielowartościową.

Jednem więc z najważniejszych pytań, które się tu nasuwają, jest pytanie: Kiedy funkcya $z(\eta)$ jest funkcyą jednoznaczną?

Pytanie to stanowiło właśnie główny przedmiot badań Kleina i Poincarégo i nad niem musimy się tu zastanowić.

Koniecznym i wystarczającym warunkiem jednowartościowości funkcyi $z(\eta)$ jest, aby płaszczyzna η albo jej część pokrytą została tylko raz przez zbiór wieloboków zasadniczych. Stąd wynika naprzód, że pole wieloboku zasadniczego nie może samo na siebie zachodzić. Nadto, w stałych punktach podstawień eliptycznych i loxodromicznych schodzą się z sobą wszystkie te wieloboki, które powstają z wieloboku zasadniczego przez powtarzanie odpowiedniego podstawienia. Do jednowartościowości więc funkcyi $z(\eta)$ potrzeba, aby te wieloboki nawzajem na siebie nie zachodziły, albo inaczej, aby, przy powtarzaniu nieograniczonem owego podstawienia, nakrywały się dokładnie tak, iżby równoważne punkty

przypadły na siebie. Nie może zaś to mieć miejsca, jeżeli podstawienie jest loxodromiczne albo nawet eliptyczne, którego amplituda φ (por. str. 277) nie jest ułamkiem 2π. Pomijając te przypadki, zajmiemy się w dalszym ciągu wielobokami zasadniczymi, posiadającymi następujące dwie własności:

a) Kąty we wierzchołkach m_i są równe $\frac{2\pi}{l_i}$, gdzie l_i jest liczbą całkowitą lub nieskończenie wielką;

b) podstawienia rodzące A'_i grupy Γ' są podstawieniami eliptycznemi lub parabolicznemi.

Równanie różniczkowe (20) przybierze odpowiednio do tych założeń kształt:

$$(21)\quad [\eta]_z = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-e_i)}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i^2}\right)}{z-e_i}(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n+Az^{n-4}+Bz^{n-5}+ \right.$$
$$\left. + \ldots + N\right).$$

gdzie l_i jest liczbą całkowitą, która stawać się może nieskończenie wielką.

Powyższe warunki jednak jednowartościowości funkcyi $z(\eta)$ wcale nie są jeszcze wystarczające. O potrzebie warunków dodatkowych przekonać się można łatwo, porównywając stałe grupy Γ', określonej przez wielobok zasadniczy ze stałemi równania (21).

Tylko w przypadku, kiedy równanie posiada $n=3$ punktów osobliwych, t. j. w przypadku tak zwanych funkcyi trójkątnych, ilość stałych określających grupę Γ' jest równa ilości stałych równania, tak, iż warunki powyższe są konieczne i wystarczające, aby funkcya $z(\eta)$ była funkcyą jednowartościową.

Warunkami dodatkowymi dla przypadków $n>3$ zajmowali się w szeregu licznych rozpraw Schottky [1]), Poincaré [2]) i Klein [3]).

W dwu rozprawach: „Mémoire sur les groupes Fuchsiennes“ i „Mémoire sur les groupes Kleinéens“ rozważa Poincaré wieloboki, których zbiór pokrywa całą płaszczyznę tylko raz, stosując metody geometryczne. Z tych wieloboków zajmować nas będą te tylko, które należą do rodzaju $p=0$, a to dla tego, żeśmy spółczynniki równań różniczkowych określili jako funkcye wymierne zmiennej z.

---

[1]) Schottky: Inaug. Dissertation. Breslau 1876; Crelle's Jour. Bd. 83.

[2]) Poincaré: Acta math., t. I, p. 1—62; t. III. p. 49—92.

[3]) Klein: Über eindeutige Funct. mit linearen Transf. in sich. Mat. Ann. Bd. 19, 20, str. 51 i nast. Neue Beiträge zur Riem. Theorie. Mat. Ann. Bd. 21, str. 141 i nast.

W pracy pierwszej z powyżej wymienionych, otrzymuje Poincaré przez stosowne rozcięcie płaszczyzny z wieloboki, których koła stoją prostopadle do pewnego koła podstawowego, niezmieniającego się przy podstawieniach grupy Γ'. Koło to można, przez odpowiednie podstawienie liniowe, zawsze zamienić na linię prostą, n. p. na oś rzeczywistą płaszczyzny, wskutek czego podstawienia grupy otrzymują spółczynniki rzeczywiste. Owóż warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, aby zbiór wieloboków pokrywał pole koła niezmiennego, względnie połowę płaszczyzny, albo całą płaszczyznę η tylko raz, są:

1) Pary boków związanych z sobą zapomocą podstawień grupy, powinny być z sobą równoważnemi;

2) Suma kątów w wierzchołkach, stanowiących odtworzenie jednego i tego samego punktu osobliwego e_i, powinna być równą $\frac{2\pi}{l_i}$, gdzie l_i jest liczbą całkowitą lub nieskończenie wielką.

Przez przemienianie pewnych stałych przy zachowaniu kątów wieloboku otrzymał Klein (Comp. Rendus 1881) z powyższych wieloboków, pokrywających pole koła, wieloboki ogólniejsze, których boki nie stoją już prostopadle do koła niezmiennego, których jednak zbiór pokrywa jeszcze tylko raz obszar płaszczyzny η, ograniczony linią nieanalityczną. Podstawienia grupy przez takie wieloboki określone, posiadają spółczynniki zespolone.

Wieloboki powyższe stanowią jednak tylko jednę klasę (première espèce) wieloboków badanych przez Poincarégo, w drugiej z powyżej wspomnianych rozpraw. Prócz tych bowiem, otrzymuje Poincaré inne, a to sposobem następującym: Grupę Γ', posiadającą spółczynniki zespolone przedstawia geometrycznie, dzieląc przestrzeń leżącą ponad płaszczyzną η za pomocą kul (względnie płaszczyzn), prostopadłych do płaszczyzny η. Otrzymuje więc jako geometryczny obraz grupy podział przestrzeni na w i e l o ś c i a n y z a s a d n i c z e, przy pomocy których wyprowadza następujące warunki nieciągłości grupy:

1) Pary ścian związanych z sobą zapomocą podstawień grupy, powinny być z sobą równoważnemi;

2) Suma kątów dwuściennych należących do krawędzi, tworzących jeden tak zwany cykl, powinna być równą $\frac{2\pi}{l_i}$, gdzie l_i jest liczbą całkowitą.

Jeżeli taki wielościan zasadniczy posiada jako ściany r wieloboków na płaszczyźnie η: $F^1, F^2, \ldots F^{(r)}$, to każdy z tych wieloboków jest na pewno wielobokiem zasadniczym grupy, zbiór zaś wieloboków

równoważnych z jednym z nich, pokrywa tylko raz pewien obszar płaszczyzny η.

Zauważyć nadto należy, że istnieją jeszcze inne sposoby otrzymywania wieloboków zasadniczych. Wystarczy wspomnieć n. p. o sposobie Kleina [1]) otrzymywania wieloboków, zwanym przez niego „Ineinanderschiebung". Nie będziemy się jednak nad tym przedmiotem zastanawiali, lecz poznawszy na drodze geometrycznej główne własności wieloboków zasadniczych, prowadzących do jednorazowego pokrycia płaszczyzny η albo jej części, zwracamy się do równania różniczkowego (21).

Zachodzi mianowicie pytanie, kiedy równanie (21) określa takie wieloboki. Odpowiedzi na to pytanie, a na nich tylko poprzestać musimy, znajdujemy w oddzielnych twierdzeniach Kleina i Poincarégo, zamieszczonych w pracach powyżej wymienionych. Twierdzenia te zebrał i obszernie wyłożył Poincaré w rozprawie: „Sur les groupes des équations linéaires" (Acta math. t. IV). Twierdzenia te brzmią:

1. Zawsze można i tylko w jeden sposób tak dobrać parametry akcesoryczne $A, B, \ldots N$ równania (21), że funkcya $z(\eta)$ jest funkcyą jednowartościową, niezmieniającą się przy podstawieniach grupy Γ', posiadających spółczynniki rzeczywiste, i istniejącą wewnątrz koła, albo względnie wewnątrz połowy płaszczyzny η. W tym więc ostatnim przypadku jest to koło albo oś rzeczywista granicą naturalną funkcyi $z(\eta)$.

2. Również tylko jednym sposobem można dobrać parametry akcesoryczne tak, iż funkcya automorficzna $z(\eta)$ jest funkcyą jednowartościową, istniejącą w całej płaszczyźnie η i niezmieniającą się przy podstawieniach, posiadających czyto spółczynniki rzeczywiste, czy też spółczynniki zespolone.

3. Nakoniec zawsze można nieskończenie wielu sposobami dobrać tak parametry, iż funkcya $z(\eta)$ jest funkcyą jednowartościową, niezmieniającą się przy podstawieniach grupy o spółczynnikach zespolonych i istniejącą w pewnych tylko obszarach płaszczyzny η.

W ustępach 17-ym i następnych, powyżej przytoczonej rozprawy, zajmuje się Poincaré przybliżonem obliczaniem parametrów akcesorycznych.

Dla jasności zaznaczam jeszcze raz, że z tych grup i funkcyi, których ogólny rys podałem, uwzględnimy tylko szczególne przypadki. I tak, jak wspomnieliśmy, zajmiemy się grupami, należącemi do ro-

---

[1]) Zob. Klein: w wyżej przytoczonej pracy, Mat. Ann. 21 (1882), str. 141 i nast.

dzaju $p = 0$, lecz i z tych grup tylko te rozważać będziemy, które prowadzą do jednorazowego pokrycia części płaszczyzny η.

§. 4.

Jednowartościowa funkcya $z(\eta)$ ustanawia między płaszczyznami z i η odpowiedniość taką, iż jednemu punktowi płaszczyzny η odpowiada jeden punkt płaszczyzny z, lecz jednemu punktowi płaszczyzny z odpowiada wogóle nieskończenie wiele punktów (z sobą równoważnych) płaszczyzny η. Chcąc jednak doprowadzić do tego, iżby jednemu punktowi z odpowiadał tylko jeden punkt płaszczyzny η, uciekamy się do znanego w teoryi funkcyi algebraicznych sposobu Riemanna. Wyobrażamy więc sobie, że do każdego wieloboku zasadniczego należy osobna płaszczyzna z, którą nazywamy liściem (Blatt). Liście te umieszczamy jeden na drugim i łączymy je z sobą w punktach osobliwych tak, iż n. p. w punkcie e_i łączy się z sobą każdym razem l_i liści w porządku kołowym. W ten sposób zbudowaną powierzchnię nazywać będziemy powierzchnią Riemanna, należącą do funkcyi $\eta(z)$ lub do równania (21). Jej punktami rozgałęzienia są naturalnie punkty osobliwe e_i, linie zaś L_i są liniami przejścia z jednego miejsca do następującego.

Tego sposobu wyrażania się z powodu jego wielkiej dogodności będziemy używali bardzo często w dalszym ciągu. Powiemy więc n. p. funkcya $\eta(z)$ odtwarza stosownie do naszej umowy należącą do niej, wogóle mówiąc, nieskończenie wieloliściową powierzchnię Riemanna na zbiór wieloboków, pokrywających tylko raz pewien obszar płaszczyzny η.

ROZDZIAŁ II.

Funkcye: $\int^z y_1 dz$; $\int^z y dz$.

§. 1.

Nie zaznaczyliśmy dotąd wyraźnie, lecz jest to oczywiste, że nieskończenie wiele równań rzędu 2-go prowadzi do tegoż samego równania rzędu 3-go (21). Są to mianowicie równania, które posiadają też same różnice wykładników $k_i' - k_i'' = \frac{1}{l_i}$.

Naodwrót, mając dane równanie (21), możemy łatwym sposobem otrzymać wszystkie równania, do niego należące, rzędu 2-go. W tym celu przyjmujemy:

$$\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

gdzie

$$(1) \qquad \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{d\eta}{dz}}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\eta}{dz}}}.$$

Owoż twierdzimy, że tak określone funkcye η_1, η_2 zadość czynią równaniu różniczkowemu rzędu 2-go. Zważmy bowiem, że jeżeli η_1, η_2 mają być całkami równania, to równanie to możemy napisać w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} y & \frac{dy}{dz} & \frac{d^2y}{dz^2} \\ \eta_1 & \frac{d\eta_1}{dz} & \frac{d^2\eta_1}{dz^2} \\ \eta_2 & \frac{d\eta_2}{dz} & \frac{d^2\eta_2}{dz^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Z równości (1) wynika

$$\eta_1 \frac{d\eta_2}{dz} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} = -1, \quad \frac{d\eta_1}{dz}\, \frac{d^2\eta_2}{dz^2} - \frac{d\eta_2}{dz}\, \frac{d^2\eta_2}{dz^2} = -\tfrac{1}{2}\,[\eta]_z;$$

a więc żądane równanie otrzymuje kształt:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{y}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-e_i)} \left[\sum \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{l_{i2}}\right)}{z-e_i} + \tfrac{1}{2}\, Az^{n-4} + Bz^{n-5} + \ldots + N\right] = 0. \qquad (2)$$

Jeżeli przy obiegach zmiennej z funkcya η ulega podstawieniom

$$\eta' = \frac{\alpha_i\,\eta + \beta_i}{\gamma_i\,\eta + \delta_i},$$

to ponieważ

$$\sqrt{\frac{d\eta'}{dz}} = \frac{\sqrt{\alpha_i\,\delta_i - \beta_i\,\gamma_i}}{(\gamma_i\,\eta + \delta_i},$$

ulegają η_1, η_2 przy obiegach podstawieniom:

$$\eta_1' = \frac{\alpha_i\,\eta_1 + \beta_i\,\eta_2}{\sqrt{\alpha_i\,\delta_i - \beta_i\,\gamma_i}}, \qquad \eta_2' = \frac{\gamma_i\,\eta_1 + \delta_i\,\eta_2}{\sqrt{\alpha_i\,\delta_i - \beta_i\,\gamma_i}},$$

posiadającym wyznaczniki $\Delta_i = 1$.

Ponieważ spółczynnik przy $\frac{dy}{dz}$ jest równy zeru, wykładniki więc czynią zadość równościom

$$k'_i + k''_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ponieważ zaś

$$k'_i - k_i'' = \frac{1}{l_i} \qquad (i=1, 3, \ldots, n),$$

więc

$$k'_i = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{l_i}\right), \quad k_i'' = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$$

Suma tych wykładników

$$\sum_{i=1}^{i=n} (k'_i + k''_i) = n,$$

skąd się okazuje, że w powyższem równaniu punkt $z=\infty$ jest także punktem osobliwym.

Każde inne równanie rzędu 2-go należące do równania (21) otrzymamy z równania (2) podstawiając

$$y_1 = \eta_1 \prod_{i=1}^{i=n} (z-e_i)^{\mu_i}, \quad y_2 = \eta_2 \prod_{i=1}^{i=n} (z-e_i)^{\mu_i}.$$

Wykładniki należące do punktów osobliwych w ten sposób otrzymywanych równań są:

$$k'_i = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{l_i}\right) + \mu_i, \quad k''_i = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right) + \mu_i. \tag{3}$$

Jeżeli żądać będziemy, aby punkt $z=\infty$ był punktem zwyczajnym, to ponieważ wówczas $\Sigma k_i + k''_i = n-2$, należy tak dobrać liczby μ_i (co zawsze uczynić można), aby

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i = -1. \tag{4}$$

Wychodząc więc z równania (21) Rozdz. I, można z pomiędzy równań rzędu 2-go, do owego równania należących, wybierać najodpowiedniejsze, zależnie od celu, który sobie wytykamy. Dla nas najodpowiedniejszemi w dalszym ciągu okażą się takie, których rozwiązania y_1, y_2 nie posiadają punktów rozgałęzienia na powierzchni Riemanna należącej do funkcyi $\eta(z)$. Zastanowić się więc musimy nad tem, czy i względnie kiedy powyższy warunek może być spełniony.

W tym celu rozróżnić nam należy dwa przypadki: *a*) wszystkie liczby l_i są liczbami skończonemi, *b*) między liczbami l_i znajdują się nieskończenie wielkie.

Jeżeli funkcye y_1, y_2 mają być funkcyami nierozgałęzionemi na powierzchni Riemanna i liczby l_i są wszystkie liczbami skończonemi,

to, ponieważ w każdym punkcie rozgałęzienia powierzchni, schodzi się z sobą l_i liści, wykładniki k'_i, k_i'' muszą być kształtu:

$$(5) \qquad k'_i = \frac{r_i+1}{l_i}, \quad k_i'' = \frac{r_i}{l_i},$$

gdzie r_i są liczbami całkowitemi kształtu $r_i = r'_i + ml_i$ a r'_i i m są liczbami całkowitemi oraz $r''_i < l_i$.

Wówczas z równania (3) mamy

$$\mu_i = \frac{2r_i+1}{2l_i} - \tfrac{1}{2}.$$

Podstawiając te wyrażenia w równanie (4) i zważając na powyższą dowolność liczb r_i, otrzymamy równanie

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2r_i+1}{2l_i} - \frac{n}{2} = \text{liczba całkowita}$$

stanowiące warunek dla liczb l_i.

Jeżeli jednak między liczbami l_i znajdują się nieskończenie wielkie to w odnośnych punktach osobliwych e, nazwijmy je e_k, łączy się z sobą w porządku kołowym nieskończenie wiele liści. Dla tych więc punktów mogą wykładniki $k_i' = k_i''$ posiadać dowolne wartości rzeczywiste i zawsze jeszcze funkcye y_1, y_2 nie będą w tych punktach na powierzchni Riemanna rozgałęzione. Oznaczając te wykładniki przez $r_k = \frac{1}{2} + \mu_k$ i zachowując wskaźnik i dla punktów osobliwych, dla których l_i są skończone, otrzymamy zamiast (6) równość:

$$(7) \qquad \sum \frac{2r_i+1}{2l_i} + \Sigma_k\, r_k - \frac{n}{2} = \text{liczba całkowita.}$$

Ponieważ tutaj r_k są liczbami dowolnemi, zatem przy odpowiednim doborze r_k zawsze istnieją rozwiązania równania (7).

Inaczej rzecz przedstawia się w przypadku pierwszym i nad nim należy się bliżej zastanowić. Roztrząsnąć mianowicie należy, kiedy równanie (6) posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych r_i.

Ponieważ prawa strona równania (6) jest liczbą całkowitą dowolną, równanie więc owo możemy napisać w postaci kongruencyi:

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2r_i+1}{l_i} \equiv n \pmod 2.$$

Rozwiązaniem tej kongruencyi zajmował się E. Ritter [1]); podajemy tu jego rezultaty i wskazujemy do nich drogę nieco zmienioną i może przystępniejszą.

Rozróżniamy dwa przypadki:

1) Wszystkie liczby l_i są nieparzyste.

Przy tem założeniu są liczby $2r_i+1-l_i$ liczbami parzystemi:

$$2r_i+1-l_i=2\nu_i.$$

Podstawiając w równaniu (6)

$$\frac{2r_i+1}{2l_i}-\tfrac{1}{2}=\frac{\nu_i}{l_i}$$

otrzymamy równanie:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\nu_i}{l_i}=\text{liczb. całkow.}$$

Dla uproszczenia rozumowania przyjmiemy prawą stronę równą zeru, co z powodu dowolności ν_i zawsze uczynić możemy. Równanie w ten sposób uproszczone:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\nu_i}{l_i}=0$$

posiada widocznie rozwiązania $\nu_i=0$, albo raczej $\nu_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ l_i)$. Zauważymy, że rozwiązanie to jest tylko wtedy jedyne, kiedy liczby l_i są względem siebie pierwsze. Mnożąc bowiem wówczas lewą stronę równania przez $\frac{L}{l_\alpha}$, gdzie $L=l_1, l_2, \ldots, l_n$, a l_α oznacza którąkolwiek z liczb l_i, otrzymujemy warunek konieczny

$$\nu_\alpha\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ l_\alpha);\quad c.b.d.o.$$

Postępując w podobny sposób nietrudno się przekonać, że w każdym innym przypadku istnieją obok powyższych jeszcze inne rozwiązania.

---

[1]) W pracy: Die eindeutigen automorphen Formen etc. (Math. Ann. Bd. 41, str. 30—35) zajmuje się Ritter wyznaczaniem pewnych „układów czynników“, od których istnienia zależy istnienie grupy Γ podstawień liniowych jednorodnych izomorficznej względem grupy Γ' podstawień niejednorodnych. Niezadługo zobaczymy, że te pytania wchodzą także w nasz zakres; stąd więc tożsamość warunków. Dla dokładności zauważymy jeszcze, że związki, zwane przez Rittera drugorzędnymi (secundäre Relationen), tutaj odpadają; ograniczyliśmy się bowiem do funkcyi istniejących tylko wewnątrz pewnego obszaru (koła) płaszczyzny η.

2) Między liczbami l_i znajduje się jedna lub więcej parzystych.

Wówczas obok kongruencyi (8) występuje jako warunek inna, którą na podstawie równania (6) w ten sposób otrzymujemy.

Mnożąc równanie (6) przez podwojoną najmniejszą spólną wielokrotność $2L$ liczb l_i, mieć będziemy:

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_i \frac{2L}{l_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} = L \times \text{ liczb. całkow.}$$

Ponieważ tak L jak i $\frac{2L}{l_i}$ jest podzielne przez 2, zatem

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} \equiv 0 \pmod{2},$$

co jest właśnie nowym warunkiem dla liczb l_i. Jeżeli przez $l_1, l_2, \ldots, l_k$ oznaczymy te z liczb l_i, które zawierają najwyższą potęgę dwu: 2^μ i nazwiemy:

$$L = 2^\mu \Lambda, \quad l_i = 2^\mu \lambda_i,$$

to powyższa kongruencya (9) zredukuje się do:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\Lambda}{\lambda_i} \equiv 0 \bmod 2,$$

gdzie już tak Λ jak i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ są liczbami nieparzystemi. Stąd zaś wprost wynika, iż tej ostatniej, a więc także kongruencyi (9), tylko wówczas staje się zadość, gdy k jest liczbą parzystą; zatem kongruencya (9) posiada tylko wówczas rozwiązania, jeżeli ilość liczb l_i, zawierających najwyższą potęgę 2^μ jest parzysta.

Naodwrót, jeżeli warunek (9) jest spełniony, to ponieważ liczby $\frac{L}{l_i}$ nie mają wszystkie spólnego dzielnika, zawsze znaleźć możemy liczby całkowite r_i czyniące zadość równaniu nieoznaczonemu, posiadającemu spółczynniki całkowite:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} r_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} = 0$$

czyli równaniu

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2 r_i + 1}{l_i} = 0.$$

Jeżeli ilość punktów osobliwych n przedstawia liczbę parzystą, to oczywiście liczby r_i są także rozwiązaniami kongruencyi (8); jeżeli zaś n jest liczbą nieparzystą, to kongruencyi (8) stanie się zadość, gdy za-

miast jednej z liczb r_α podstawimy: $r_\alpha - \frac{1}{2} l_\alpha$, gdzie l_α jest jedną z liczb parzystych układu liczb l_i.

Widzimy więc, że kongruencya (8) zawsze posiada rozwiązania, jeżeli tylko liczby l_i czynią zadość kongruencyi (9).

Mamy zatem twierdzenie: zawsze istnieją równania różniczkowe rzędu 2-go przy danych l_i, których całki y_1, y_2 nie są rozgałęzione na powierzchni Riemanna należącej do funkcyi $\eta(z)$. Wyjątek stanowi przypadek, kiedy wszystkie liczby l_i są skończone i nieparzysta ich ilość zawiera jako czynnik najwyższą z potęg liczby 2 zachodzących w liczbach l_i; wówczas takie równania na pewno nie istnieją.

§. 2.

Charakterystycznym zwrotem, który teraz badaniu nadajemy, jest to, że jako zmienną niezależną obieramy wielkość η.

Wogóle mówiąc, całki y_1, y_2 są funkcyami wielowartościowemi tej zmiennej. W przeciwstawieniu temu ogólnemu zachowaniu się całek y_1, y_2 twierdzimy: jeżeli równanie różniczkowe rzędu 2-go posiada następujące dwie własności: 1) całki jego y_1, y_2 nie są rozgałęzione na powierzchni Riemanna $\eta(z)$; 2) funkcya $\eta(z)$ odtwarza ową powierzchnię Riemanna na obszar (n. p. koło) płaszczyzny η pokryty raz zupełnie, t. j. jeżeli funkcya automorficzna $z(\eta)$ jest funkcyą jednowartościową istniejącą tylko wewnątrz obszaru, —

to całki y_1, y_2 takiego równania różniczkowego są funkcyami jednowartościowemi zmiennej η istniejącemi wewnątrz owego obszaru.

Aby tego twierdzenia dowieść, potrzeba naprzód okazać, iż funkcye $y_1(\eta)$, $y_2(\eta)$ nie posiadają w obszarze płaszczyzny η, w którym istnieją, punktów rozgałęzienia. W tym celu rozważyć nam należy dwa rodzaje punktów:

1) punkty $\eta = \eta_0$ leżące na polu wieloboków. Punktom tym, jak wiadomo, odpowiadają punkty zwyczajne płaszczyzny z, dla których mieliśmy rozwinięcia (2) i (16):

$$y_1 - y_1^{(o)} = (z - z_0)(a_1 + a_2(z - z_0) + \ldots)$$
$$y_2 - y_2^{(o)} = (z - z_0)(b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots)$$
$$\eta - \eta_0 = (z - z_0)(c_1 + c_2(z - z_0) + \ldots)$$

Z ostatniego równania otrzymujemy wyrażenie:

$$z-z_0=(\eta-\eta_0)(d_1+d_2(\eta-\eta_0)+\ldots),$$

które podstawiając w dwu pierwszych wyrażeniach, otrzymamy dla y_1, y_2 szeregi potęgowe idące według całkowitych rosnących potęg $\eta-\eta_0$. Punkt więc $\eta=\eta_0$ jest także dla funkcyi y_1, y_2 punktem zwyczajnym. Tożsamo stosuje się do punktu $\eta=\eta_\infty$;

2) punkty $\eta=m_i$ będące wierzchołkami wieloboków. Punktom tym odpowiadają na płaszczyźnie z punkty osobliwe e_i, dla których istniały rozwinięcia:

$$y_1=(z-e_i)^{\frac{r_i+1}{l_i}-s_i}(a_0+a_1(z-e_i)+\ldots)$$

$$y_2=(z-e_i)^{\frac{r_i}{l_i}-s_i}(b_0+b_1(z-e_i)+\ldots)$$

$$\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}(z-e_i)^{\frac{1}{l_i}}(c_0+c_1(z-e_i)+\ldots).$$

Z ostatniego rozwinięcia mamy:

$$z-z_0)=\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{l_i}(c_0+c_i\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{l_i}+\ldots)$$

tak, iż

$$y_1=\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{r_i+1-l_is_i}(f_0+f_1\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{l_i}+\ldots)$$

$$y_2=\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{r_i-l_is_i}(g_0+g_1\left(\frac{\eta-m_i}{\eta-n_i}\right)^{l_i}+\ldots).$$

Stąd się okazuje, że także punkty $\eta=m_i$ nie są punktami rozgałęzienia funkcyi y_1, y_2.

Przypuściliśmy tu, że l_i są liczbami skończonemi. Lecz jeżeli l_i jest liczbą nieskończenie wielką, to, ponieważ w odpowiednich punktach $\eta=m_k$, także $\log(z-e_k)$ jest funkcyą nierozgałęzioną, zatem również $(z-e_k)^{r_k}$, gdzie r_k jest liczbą dowolną rzeczywistą (nawet niewymierną) posiada tęż samę własność. A więc i w punktach m_k nie są y_1, y_2 rozgałęzione. *C. b. d. o.*

Dla uzupełnienia dowodu twierdzenia o jednowartościowości funkcyi y_1, y_2 zauważymy, że obszar płaszczyzny η, w którym się znajdujemy, jest obszarem o łączności pojedyńczej, tak iż każda droga zamknięta,

zakreślona wewnątrz tego obszaru, pozwala się w sposób ciągły, bez przerwy, zredukować do jednego punktu.

Tym więc sposobem twierdzenie nasze jest okazane. Wnioskiem z niego bezpośrednim jest to, że grupa Γ podstawień jednorodnych równania różniczkowego rzędu 2-go jest izomorficzną względem grupy Γ' podstawień liniowych niejednorodnych funkcyi η.

Nad tym stosunkiem grup Γ i Γ' należy się bliżej zastanowić.

Zauważmy naprzód, że spółczynniki podstawienia A_i grupy Γ mogą się różnić od spółczynników odpowiedniego podstawienia grupy Γ' tylko czynnikiem stałym σ_i:

$$\alpha_i = \sigma_i \alpha'_i, \quad \beta_i = \sigma_i \beta'_i, \quad \gamma_i = \sigma_i \gamma'_i, \quad \delta_i = \sigma_i \delta'_i. \tag{10}$$

W Rozdziale I mieliśmy między podstawieniami rodzącemi grupy Γ' związek (13). Nadto jeżeli między podstawieniami grupy Γ' znajdują się podstawienia eliptyczne A'_i o peryodzie l_i, to z postaci tych podstawień wprost wynika, że takie podstawienie l_i razy powtórzone prowadzi do podstawienia tożsamościowego

$$A'^{l_i}_i = 1. \tag{11}$$

Takich związków różnych od siebie otrzymamy tyle, ile zachodzi różnych od siebie podstawień eliptycznych rodzących.

Ponieważ grupa Γ jest grupą izomorficzną względem grupy Γ', t. j. każdemu podstawieniu grupy Γ' odpowiada jedno podstawienie grupy Γ i nawzajem, więc między podstawieniami grupy Γ istnieć muszą dokładnie też same związki, co między podstawieniami grupy Γ'. Związek odpowiadający związkowi (13, Rozdz. I) był przedstawiony przez równanie (10, Rozd. I). Związkom zaś powyższym (11) odpowiadać będą:

$$A^{l_i}_i = 1. \tag{12}$$

Stąd wynika, że także między spółczynnikami σ_i istnieją pewne zależności. Aby je bliżej poznać, przyjmiemy, że wyznaczniki podstawień (A') grupy Γ' są równe jedności (co zawsze osiągnąć można) a nadto wprowadzimy wraz z Ritterem [1]) do pomocy grupę jednorodną Γ'' taką, iż jednemu podstawieniu

$$A') \qquad \eta' = \frac{\alpha' \eta + \beta'}{\gamma' \eta + \delta'}$$

odpowiadają dwa podstawienia:

$$A''): \quad \begin{array}{ll} \eta_1' = \alpha' \eta_1 + \beta' \eta_2; & \eta_1' = -\alpha_1' \eta_1 - \beta' \eta_2 \\ \eta_2' = \gamma' \eta_1 + \delta' \eta_2; & \eta_2' = -\gamma' \eta_1 - \delta' \eta_2 \end{array}$$

---

[1]) l. c. str. 22 i nast.

a więc także szczególnie podstawieniu tożsamościowemu

$$\eta' = \eta$$

dwa podstawienia:

$$\eta_1' = \eta_1, \ \eta'_2 = \eta_2; \quad \eta_1' = -\eta_1, \ \eta_2' = -\eta_2.$$

Taką grupę Γ'' widocznie zawsze zbudować możemy. Związkom (12 Rozdz. I) i (11) między podstawieniami grupy Γ odpowiadają przy odpowiednio dobranych podstawieniach tej nowej grupy związki

$$A''^{l_i} = -1.$$
$$A_1'' . A_2'' \ldots A_n'' = (-1)^n.$$

Otóż, ponieważ spółczynniki podstawień grupy Γ różnią się od spółczynników podstawień grupy Γ'' tylko czynnikami σ_i, podstawienia zaś grupy Γ zadość czynią związkom (10, Rozdz. I) i (12), więc między spółczynnikami σ_i istnieją równości:

$$\sigma_i^{l_i} = -1, \quad \prod_{i=1}^{i=n} \sigma_i = (-1)^n.$$

Stąd zaś jest widoczne, że spółczynniki σ_i należące do podstawień eliptycznych grupy jakoteż do wszystkich, które z powyższych przez powtarzanie i kombinacye powstają, są pierwiastkami z jedności i mają kształt: $\sigma_i = e^{\frac{2r_i+1}{l_i}\pi_i}$.

Zanim przedmiot ten opuścimy, zrobimy jeszcze uwagę następującą. W §. 1-ym tego rozdziału widzieliśmy, że całki η_1, η_2 równania różniczkowego (2) ulegają podstawieniom jednorodnym o wyznaczniku równym jedności. Z temi całkami są związane całki y_1, y_2, do których należy grupa Γ, zapomocą równości:

$$y_1 = \eta_1 \prod_{i=1}^{i=n} (z-e_i)^{\mu_i}, \quad y_2 = \eta_2 \prod_{i=1}^{i=n} (z-e_i)^{\mu_i}.$$

Przy obiegu zatem około punktu osobliwego e_i, przybędą dla skończonego l_i, przy spółczynnikach podstawień funkcyi η_1, η_2 czynniki:

(13) $$\sigma_i = 1^{\mu_i} = \pm e^{\frac{2r_i+1}{l_i}\pi_i},$$

co jest zgodne z powyższym rezultatem.

Nadto, gdy $l_i = \infty$, to czynniki te będą:

(14) $$\sigma_k = \pm e^{2\pi_i r_k},$$

a więc także σ_k są pierwiastkami z jedności. Nakoniec z równania (6) i (7) wprost wynika związek:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \sigma_i = (-1)^n \text{ albo względnie } \Pi \sigma_i . \Pi \sigma_k = (-1)^n. \quad (15)$$

§. 3.

Przechodzimy do naszego właściwego zadania, a mianowicie do badania całek rozwiązań równań różniczkowych wyżej określonych:

$$\int y_1\, dz, \qquad \int y_2\, dz.$$

Warunki, pod którymi funkcye y_1, y_2 są funkcyami jednowartościowemi zmiennej η, wymienione w ustępie poprzedzającym, potrzebują tylko nieznacznego uzupełnienia, aby pozostały warunkami koniecznymi i wystarczającymi, na to, aby także funkcye

$$j_1 = \int y_1\, dz, \quad j_2 = \int y_2\, dz$$

były na płaszczyżnie η funkcyami jednowartościowemi.

W istocie, przyjmując zamiast z wielkość η za zmienną niezależną, należy zamiast $d\,z$ podstawić $\frac{dz}{d\eta}.d\eta$. Ponieważ jednak funkcya $z(\eta)$ jest jednowartościowa, więc toż samo stosuje się do jej pochodnej, tak, iż pod znakami całkowania posiadać będziemy same funkcye jednowartościowe. Jeżeli więc tylko postaramy się jeszcze o to, abyśmy wewnątrz obszaru płaszczyzny η nie otrzymywali punktów „logarytmicznych“, t. j. punktów, dla których

$$\int y\left(\frac{dz}{d\eta}\right) d\eta = c \log(\eta - \eta_0) + \dots,$$

to i wówczas jeszcze każdą drogę zamkniętą wewnątrz obszaru, będziemy mogli zredukować do jednego punktu dowolnego, a więc i wówczas jeszcze funkcye j_1, j_2, jako funkcye zresztą nierozgałęzione pozostaną funkcyami jednowartościowemi.

Aby rozstrzygnąć, kiedy j_1, j_2 posiadają punkty logarytmiczne, wystarczy, jak zwykle, rozpatrzyć trzy rodzaje punktów:

1) Nad punktem zwyczajnym z_0 płaszczyzny z w odległości skończonej nie będziemy się zatrzymywali, gdyż jak z rozwinięć funkcyi

y_1, y_2 w okolicy takiego punktu się okazuje, jest on także punktem zwyczajnym dla funkcyi j_1, j_2.

2) Jeżeli jednak $z_0=\infty$, to podstawiając $z=\frac{1}{t}$, otrzymamy

$$j_1=-\int y_1(t)\frac{dt}{t^2}$$

$$j_2=-\int y_2(t)\frac{dt}{t^2}.$$

Wprowadzając więc zamiast y_1, y_2 rozwinięcia ich na szeregi (2), mieć będziemy w okolicy punktu $t=0$

$$j_1=\frac{a_0}{t}-a_1\log t+\ldots$$

$$j_2=\frac{b_0}{t}-b_1\log t+\ldots.$$

Aby zatem nie występowały logarytmy, potrzeba, iżby $a_1=b_1=0$, co ze względu na nierówność $a_0b_1-a_1b_0\gtrless 0$ jest niemożliwe. Tak więc, w razie gdy punkt $t=0$ czyli $z=\infty$ jest dla funkcyi y_1, y_2 punktem zwyczajnym, to jest on dla funkcyi j_1, j_2 punktem logarytmicznym. Stąd wynika, że punkt $z=\infty$ musi być punktem osobliwym równania, jeżeli nie chcemy mieć punktów logarytmicznych w funkcyach j_1, j_2. Aby jednak uniknąć wprowadzania nowych punktów osobliwych, przenosimy jeden z punktów osobliwych: e_n do nieskończoności i tym sposobem ograniczamy się do rozważania

3) n punktów osobliwych e_1, e_2 . . . e_{n-1}, $e_n=\infty$.

Jeżeli liczby l_i $\left(k'_i-k''_i=\frac{1}{l_i}\right)$ są liczbami skończonemi, to, aby punkty e_i nie były punktami logarytmicznymi, wystarcza założenie, że wykładniki

$$k'_i, k''_i \quad (i=1, 2, \ldots n-1)$$

nie otrzymują wartości ujemnych całkowitych, a

$$k'_n,\ k''_n$$

wartości całkowitych mniejszych od 2.

Jeżeli zaś $l_i=\infty$ to odpowiednie wykładniki $k'_i=k''_i$ przyjmować mogą wartości jakiekolwiek, gdyż w punktach m_i, odpowiadających punktom e_i, jest jeszcze, jak w §. 2 zaznaczyliśmy, $\log(z-e_i)$ funkcyą jednowartościową.

§. 4.

Rozważywszy oddzielne punkty osobliwe funkcyi j_1, j_2, zwróćmy teraz uwagę na zachowanie się tych funkcyi przy dowolnej zmianie, t. j. przy dowolnych obiegach zmiennej z około punktów osobliwych (rozgałęzienia) powierzchni Riemanna. Ograniczymy się przytem do funkcyi j_1, j_2, nieposiadających punktów logarytmicznych.

Jako granice niższe funkcyi j_1, j_2 obieramy punkt stały, zresztą dowolny z_0 (moglibyśmy równie dobrze dwa stałe punkty obrać) i uważamy j_1, j_2 jako funkcye krańców wyższych z; mamy zatem:

$$j_1 = \int_{z_0}^{z} y_1\, dz\,,\; j_2 = \int_{z_0}^{z} y_2\, dz.$$

Pochodne tych funkcyi:

$$\frac{dj_1}{dz} = y_1\,, \quad \frac{dj_2}{dz} = y_2$$

ulegają, jak wiadomo, przy obiegach zmiennej z podstawieniom liniowym jednorodnym grupy Γ:

$$A_i)\; \begin{aligned} y'_1 &= \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 \\ y'_2 &= \gamma_i g_1 + \delta_i y_2\,, \end{aligned}$$

które bliżej poznaliśmy w §. 2-gim.

Całkując obustronnie ostatnie równania i oznaczając stałe całkowania przez p_i, q_i, otrzymamy podstawienia kształtu:

$$\mathrm{A}_i)\; \begin{aligned} j'_1 &= \alpha_i j_1 + \beta_i j_2 + p_i \\ j'_2 &= \gamma_i j_1 + \delta_i j_2 + q_i\,, \end{aligned} \tag{16}$$

którym ulegają funkcye j_1, j_2 przy obiegach zmiennej z około punktów osobliwych e_i.

Widocznem jest, że wykonywając po sobie podstawienia (16), zawsze otrzymywać będziemy podstawienia tego samego kształtu. Zbiór więc podstawień (16) tworzy dla siebie grupę, którą stale oznaczać będziemy literą G. Jej podstawieniami rodzącemi są podstawienia A_i.

Z uwagi, że nietylko y_1, y_2, lecz także j_1, j_2 są funkcyami jednowartościowemi zmiennej η wynika, że każdemu podstawieniu grupy Γ' lub grupy Γ odpowiada jedno i tylko jedno podstawienie grupy G. Lecz i nawzajem, mając dane podstawienie A_i grupy G, mamy temsamem określone podstawienie A_i grupy Γ lub podstawienie A'_i

grupy Γ'. Grupa zatem G jest izomorficzna względem grupy Γ lub Γ'.

Stąd zaś wynika, że między podstawieniami grupy G zachodzą też same związki, co między podstawieniami grupy Γ:

$$A_1 . A_2 \ldots A_n = 1 \tag{17}$$

$$A_i^n = 1. \tag{18}$$

Równania te wiodą do związków liniowych jednorodnych między nowemi stałemi p, q należącemi do grupy G. Jakoż, wykonywając po sobie dwa podstawienia

$$A_1) \begin{array}{l} j'_1 = \alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2 + p_1 \\ j'_2 = \gamma_1 j_1 + \delta_1 j_2 + q_1 \end{array}$$

$$A_2) \begin{array}{l} j'_1 = \alpha_2 j_1 + \beta_2 j_2 + p_2 \\ j'_2 = \gamma_2 j_1 + \delta_2 j_2 + q_2, \end{array}$$

otrzymamy podstawienie złożone:

$$A_1 A_2) \begin{array}{l} j'_1 = (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2) j_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2) j_2 + (\alpha_1 p_2 + \beta_1 q_2) + p_1 \\ j'_2 = (\gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2) j_2 + (\gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2) j_2 + (\gamma_1 p_2 + \delta_1 q_2) + q_1 . \end{array}$$

Stąd już możemy wnieść o sposobie tworzenia się spółczynników przy wykonywaniu dalszych podstawień: $A_3, \ldots, A_n$. Nazywając dla krótkości spółczynniki podstawienia $A_1 . A_2 \ldots A_\nu$ przez a_ν, b_ν, c_ν, d_ν, P_ν, Q_ν, mieć będziemy:

$$\begin{array}{l} a_\nu = a_{\nu-1} \alpha_\nu + b_{\nu-1} \gamma_\nu \\ b_\nu = a_{\nu-1} \beta_\nu + b_{\nu-1} \delta_\nu \\ c_\nu = c_{\nu-1} \alpha_\nu + d_{\nu-1} \gamma_\nu \\ d_\nu = c_{\nu-1} \beta_\nu + d_{\nu-1} \delta_\nu, \end{array}$$

gdzie oczywiście: $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$, $d_0 = 1$; a

$$\begin{array}{l} P_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\nu} (a_{\nu-1} p_\nu + b_{\nu-1} q_\nu) \\ Q_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\nu} (c_{\nu-1} p_\nu + d_{\nu-1} q_\nu). \end{array} \tag{19}$$

Podstawiając tutaj $\nu = n$ mamy, na mocy równania (17), żądane związki

$$P_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_{\nu-1}\, p_\nu + b_{\nu-1}\, q_\nu) = 0$$

$$Q_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (c_{\nu-1}\, p_\nu + d_{\nu-1}\, q_\nu) = 0. \tag{20}$$

Jeżeli zaś w (19) podstawimy $\nu = l_i$ i zważymy, że przy powtarzaniu podstawienia A_i jest $p_\nu = p_i$, $q_\nu = q_i$, otrzymamy związki:

$$p_i \sum_{\nu=1}^{\nu=l_i} a_{\nu-1} + q_i \sum_{\nu=1}^{\nu=l_i} b_{\nu-1} = 0$$

$$p_i \sum_{\nu=1}^{\nu=l_i} c_{\nu-1} + q_i \sum_{\nu=1}^{\nu=l_i} d_{\nu-1} = 0, \tag{21}$$

gdzie $a_{\nu-1}$, ... są spółczynnikami podstawienia $A_i^{\nu-1}$.

Równania (21) mają miejsce, jeżeli wyznacznik:

$$D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=l_i} a_{\nu-1} & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=l_i} b_{\nu-1} \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=l_i} c_{\nu-1} & \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=l_i} d_{\nu-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Aby dowieść tej ostatniej równości, zważmy, że własność przez nią wyrażona stosuje się do każdego podstawienia eliptycznego bez względu na jego kształt. Dla ułatwienia więc dowodu, wprowadzimy kształt następujący. Na stronie (274) widzieliśmy, że każde podstawienie eliptyczne daje się przedstawić w kształcie kanonicznym:

$$\frac{\eta' - m_i}{\eta' - n_i} = e^{\frac{2\pi_i}{l_i}} \frac{\eta - m_i}{\eta - n_i},$$

gdzie m_i i n_i są punktami stałymi podstawienia. Przy pomocy podstawienia

$$\eta' = \frac{\eta - m_i}{\eta - n_i}$$

możemy zawsze do tego doprowadzić, że punktami stałymi podstawienia tego będą $m_i = 0$, $n_i = \infty$, w skutek czego podstawienie eliptyczne przyjmie prostą postać:

$$\eta' = e^{\frac{2\pi_i}{l_i}} . \eta.$$

Podstawieniu temu niejednorodnemu odpowiadają, bez względu na znak, podstawienia jednorodne grupy Γ'' [1])

$$\eta_1' = e^{\frac{\pi_i}{l_i}} \cdot \eta_1$$
$$\eta_2' = e^{-\frac{\pi_i}{l_i}} \cdot \eta_2;$$

a więc, jeżeli, jak zawsze, σ_i oznacza odpowiedni czynnik, podstawieniami grupy jednorodnej Γ będą:

$$y_1' = \sigma_i . e^{\frac{\pi_i}{l_i}} . y_1$$
$$y_2' = \sigma_i . e^{-\frac{\pi_i}{l_i}} y_2,$$

czyli z uwagi, że $\sigma_i^{l_i} = -1$, podstawieniami temi będą:

$$y_1' = \sigma_i^2 y_2$$
$$y_2' = \quad y_2;$$

jest więc $\alpha_i = \sigma_i^2$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 1$ i równość (22) redukuje się do równania:

$$1 + \sigma_i^2 + \sigma_i^4 + \ldots + \sigma_i^{2l_i - 2} = 0,$$

wskazującego, że σ_i^2 jest pierwiastkiem równania $(\sigma_i^2)^{l_i} = 1$, które znowu jest następstwem równania $\sigma_i^{l_i} = -1$. Istotnie więc równaniu (22) staje się zawsze zadość, a przeto: równania (21) określają stosunek stałych p_i i q_i należących do podstawienia eliptycznego. Nakoniec zauważymy tutaj, że dowolność punktu z_0 pociąga za sobą dowolność dwu stałych p i q, tak, iż obierając n. p. ten punkt z_0 za osobliwy, otrzymamy dla odpowiednich stałych p i q wartości równe zeru. Nadto możemy funkcye j_1, j_2 pomnożyć przez czynniki stałe, przez co wcale ich istoty nie zmienimy.

§. 5.

Znając podstawienia rodzące grupy G, możemy przez powtarzanie ich i kombinowanie otrzymać każde inne podstawienie, należące do dowolnie danego wieloboku płaszczyzny η. Drogato jednak długa i mozolna. Zachodzi więc pytanie, czy nie można wprost dla da-

[1]) Ritter l. c. str. 23.

nego wieloboku, czyli dla danego podstawienia grupy Γ', wyznaczyć odpowiedniego podstawienia grupy G?

Przypuszczając znajomość grupy Γ, a więc znajomość czynników σ, potrzebujemy, w odpowiedzi na powyższe pytanie, określić bliżej stałe p i q. Ponieważ grupa G jest izomorficzna z grupą Γ, więc te stałe są funkcyami jednowartościowemi spółczynników $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Zajmiemy się teraz temi funkcyami, a w szczególności wyprowadzeniem wzorów, pozwalających te stałe przy danych α, β, γ, δ stopniowo obliczyć. Aby jasno całe postępowanie przedstawić, przeprowadzimy rzecz na szczególnym przykładzie, zaznaczając, iż metoda użyta stosuje się do każdego przypadku.

Przykład, o którym mowa, bierzemy z teoryi funkcyi modułowych. W teoryi tych funkcyi gra, jak wiadomo, wielką rolę równanie różniczkowe rzędu 3-go, kształtu równań (21 Rozdziału I), posiadające trzy punkty osobliwe $e_1 = \infty$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$, do których należą liczby: $l_1 = \infty$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$.

Powierzchnia Riemanna należąca do funkcyi $\eta(z)$ jest nieskończenie wielolIściowa; w jej punktach rozgałęzienia łączą się z sobą, stosownie do powyższych wartości liczb l_i, w jednym nieskończenie wiele liści, w drugim dwa, w trzecim trzy liście. Zatem według tego, cośmy wyżej powiedzieli, można znaleźć zawsze jedno albo więcej równań różniczkowych rzędu 2-go takich, że całki y_1, y_2 nie są na tej powierzchni rozgałęzione. Jakoż, równanie (7) redukuje się tutaj do równania:

$$2r_1 + \frac{2r_2 + 1}{2} + \frac{2r_3 + 1}{3} = \text{liczb. całk.}$$

Jednem z rozwiązań tego równania jest układ liczb:

$$r_1 = \frac{1}{4} + \text{liczb. całk.}, \quad r_2 \equiv 1 \pmod{2}, \quad r_3 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Wykładniki więc odpowiedniego równania różniczkowego rzędu 2-go mają kształt:

$$\begin{array}{lll} k_1' = \frac{1}{4} + s_1 & k_2' = 1 - s_2 & k_3' = \frac{2}{3} - s_3 \\ ; & ; & ; \\ k_1'' = \frac{1}{4} + s_1 & k_2'' = \frac{1}{2} - s_2 & k_3'' = \frac{1}{3} - s_3 \end{array}$$

liczby całkowite s_1, s_2, s_3 należy tak dobrać, aby się stało zadość równaniu warunkowemu:

$$k_1' + k_1'' + k_2' + k_2'' + k_3' + k_3'' = 1,$$

czyli równaniu

$$-s_1 + s_2 + s_3 = 1.$$

Takiemi liczbami są między innemi: $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, tak, iż ostatecznie wykładniki k_i', k_i'' otrzymują wartości:

$$k_1' = \frac{5}{4}\,;\quad k_2' = 0\,;\quad k_3' = -\frac{1}{3}\,;$$

$$k_1'' = \frac{5}{4}\quad k_2'' = -\frac{1}{2}\quad k_3'' = -\frac{2}{3}$$

w skutek tego równanie różniczkowe, którego całki rozważać będziemy jest:

$$y'' + \frac{7z-4}{2z(z-1)}\,y' + \frac{225z-32}{144z^2(z-1)}\,y = 0. \tag{23}$$

O funkcyi $\eta(z)$ wiadomo, że przedstawia ona stosunek peryodów ω_1, ω_2 całki eliptycznej:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2\,x - g_3}}$$

w zależności od modułu (niezmiennika bezwzględnego)

$$z = J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2}.$$

Funkcya ta $\eta\ (z)$ — oznaczana zwykle symbolem $\omega\ (J)$, co i my tu zachowamy, — odtwarza powierzchnię Riemanna, rozciętą

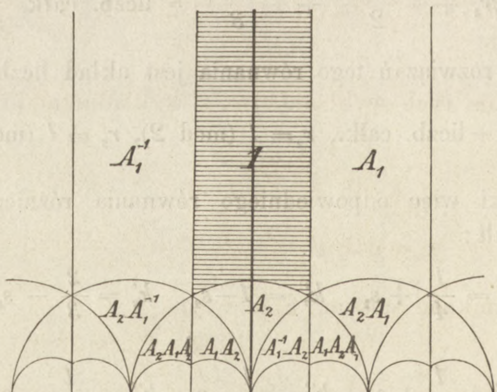


Fig. 4.

wzdłuż osi rzeczywistej od punktu $-\infty$ do punktu 1, na połowie płaszczyzny $\eta = \omega$ raz zupełnie trójkątami pokrytej (Fig. 4). Z tego powodu jest

funkcya $J(\omega)$ funkcyą automorficzną jednowartościową, skąd wynika, że także funkcye y_1, y_2 i funkcye j_1, j_2 są funkcyami jednowartościowemi zmiennej ω.

Nadzwyczaj wygodne i w przyszłości nam potrzebne przedstawienie funkcyi j_1, j_2 jako funkcyi ω, otrzymamy, biorąc do pomocy ilości g_2, g_3 i „wyróżnik“ (discriminant) $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Wielkości te[1]) są funkcyami jednorodnemi czyli formami automorficznemi zmiennych ω_1, ω_2 o wymiarach odpowiednio (—4)-ym, (—6)-ym, (—12)-ym. Ponieważ bowiem

$$\frac{y_1}{y_2} = \eta(z) = \omega(J) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

jest:

$$y_1 = M\omega_1\,,\; y_2 = M\omega_2$$

Nadto zważmy, że funkcye:

$$\omega_1 \sqrt{\frac{g_2}{g_3}} = \Omega_1\,,\; \omega_2 \sqrt{\frac{g_2}{g_3}} = \Omega_2\,,$$

czynią zadość równaniu różniczkowemu [2]) rzędu 2-go:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{31}{144J^2(J-1)^2}\,\Omega = 0\,,$$

posiadającemu w punktach $e_1 = \infty$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$ odpowiednio wykładniki:

$$\begin{matrix} k_1' = 0 & k_2' = \frac{3}{4} & k_3' = \frac{1}{6} \\ k_1'' = 0 & k_2'' = \frac{1}{4} & k_3'' = -\frac{1}{6} \end{matrix}\,;\;.$$

Z porównania tych wykładników z wykładnikami równania (23) wynika, że

$$y_1 = c\,\Omega_1\, J^{-1/2}\,(J-1)^{-3/4}$$

$$y_2 = c\,\Omega_2\, J^{-1/2}\,(J-1)^{-3/4}\,,$$

gdzie c jest czynnikiem stałym. Stąd więc

$$M = c\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\,.\,J^{-1/2}.(J-1)^{-3/4}\,.$$

---

[1]) Por. Klein-Fricke. Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen str. 118.

[2]) Klein - Fricke l. c. str. 34.

Ponieważ zaś, jak łatwo sprawdzić,

$$\sqrt{\frac{g_3}{g_2}} = c_1 . \sqrt[4]{\Delta} . J^{-1/6} . (J-1)^{1/4},$$

a

$$dJ = c_2 . \omega_2^2 \sqrt[4]{\Delta} . J^{2/3} . (J-1)^{1/2} . d\omega,$$

zatem

$$y_1\, dJ = c'\, \omega\, (\omega_2^2 \sqrt[4]{\Delta})\, d\omega$$

$$y_2\, dJ = c' \quad (\omega_2^2 \sqrt[4]{\Delta})\, d\omega.$$

Z uwagi, że $\sqrt[4]{\Delta}$ jest formą zmiennych ω_1, ω_2 wymiaru -3-go, wynika, że $\omega_2^3 \sqrt[4]{\Delta}$ jest istotnie funkcyą samego ω, jak być powinno. Wygodniej jednak będzie zachować kształt jednorodny; — tak więc obok wyrażeń funkcyi j_1, j_2 jako funkcyi zmiennej J:

$$(24) \qquad j_1 = \int_{J_0}^{J} y_1\, dJ \qquad j_2 = \int_{J_0}^{J} y_2\, dJ$$

otrzymamy wyrażenia

$$(24') \qquad j_1(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega_1 \sqrt[4]{\Delta}\, (\omega d\omega) \qquad j_2(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega_2 \sqrt[4]{\Delta}\, (\omega d\omega)$$

[gdzie $(\omega d\omega) = (\omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1)$] przedstawiające j_1, j_2 jako funkcye jednowartościowe zmiennej ω.

§. 6.

Z kolei wypada się szczegółowiej zastanowić nad grupą G, należącą do tak określonych funkcyi j_1, j_2.

W tym celu wychodzimy, idąc drogą wskazaną w ustępie 4-ym, z grupy niejednorodnej Γ', należącej do funkcyi $\omega(J)$. Grupa ta składa się z podstawień liniowych, których spółczynniki są liczbami całkowi-

temi: α', β' γ', δ', posiadającemi wyznacznik równy jedności. Za podstawienia rodzące służyć mogą z uwagi, że A'_1 A'_2 $A'_3 = 1$ dwa pierwsze z podstawień:

$$\begin{aligned} A'_1)\quad & \omega' = \omega + 1 \\ A'_2)\quad & \omega' = -\frac{1}{\omega} \\ A'_3)\quad & \omega' = \frac{1}{1-\omega}; \end{aligned} \tag{25}$$

podstawienia te odpowiadają obiegom zmiennej J około punktów odpowiednio ∞, 1, 0. Ponieważ każde podstawienie $A' = \dfrac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$ grupy Γ' pozwala się wieloma sposobami przedstawić w postaci

$$A' = A_1'^{m_0} . A'_2 . A_1'^{m_1} . A'_2 \ldots A_1'^{m_n},$$

odpowiednio więc do tego można wielu sposobami rozwinąć $\dfrac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$ na ułamek ciągły:

$$\frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'} = m_0 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{m_2 - \cdots \cfrac{1}{m_n - \omega}}}. \tag{26}$$

Rozwinięcie to łatwo otrzymać, jeżeli zważymy, że dla $\omega = 0$ jest

$$\frac{\beta'}{\delta'} = m_0 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{m_2 - \cdots \cfrac{1}{m_n}}}.$$

Geometryczny obraz tej grupy podaliśmy już w §. poprzedzającym na Fig. 4-ej. Zauważymy jeszcze, że, jeżeli trójkąt oznaczony na figurze liczbą 1 przyjmiemy za wielobok początkowy, to do wieloboków przyległych należą podstawienia takie, jakie zaznaczyliśmy na figurze. Nadto z figury wprost się okazuje, że jest ona symetryczna względem osi urojonej.

Potrzeba nam będzie wkrótce wiedzieć, jakie podstawienia A') prowadzą do trójkątów symetrycznie położonych względem owej osi urojonej. Niech $\omega_1 = x_1 + iy_1$ i $\omega_2 = x_2 + iy_2$ będą punktami symetrycznymi względem osi urojonej, a $\begin{pmatrix}\alpha'_1 & \beta'_1 \\ \gamma'_1 & \delta'_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'_2 & \beta'_2 \\ \gamma'_2 & \delta'_2\end{pmatrix}$ będą podstawieniami, które prze-

noszą punkt $\omega = iy$ osi urojonej do owych punktów ω_1, ω_2. Wówczas jest

$$x_1 = \frac{\beta_1'\delta_1' + \alpha_1'\gamma_1' y^2}{\delta_1'^2 + \gamma_1'^2 y_1^2}, \; y_1 = \frac{1}{\delta_1'^2 + \gamma_1'^2 y^2}, \; x_2 = \frac{\beta_2'\delta_2' + \alpha_2'\gamma_2 y_2}{\delta_2'^2 + \gamma_2'^2 y^2}, \; y_2 = \frac{1}{\delta_2'^2 + \gamma_2'^2 y^2};$$

z warunków zaś: $x_1 = -x_2$, $y_1 = y_2$, otrzymujemy

$$\alpha_2' = -\alpha_1', \; \gamma_2' = \gamma_1'$$
$$\beta_2' = \beta_1' \quad \delta_2' = -\delta_1';$$

a więc podstawienia

$$(27) \qquad A') \quad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}; \qquad B') \begin{pmatrix} -\alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\delta' \end{pmatrix}$$

należą do trójkątów symetrycznie położonych względem osi urojonej. Z kształtu podstawienia (B') wynika, iż

$$(28) \qquad \frac{-\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega - \delta'} = -m_0 - \cfrac{1}{-m_1 - \cdots - \cfrac{1}{-m_n + \omega}}.$$

Tyle co do grupy Γ' — teraz zaś przejdźmy do rozważania grupy G. Podstawienia rodzące tej grupy odpowiadają, jak widzieliśmy, podstawieniom rodzącym grupy Γ' (25), które powstały wskutek obiegów około punktów ∞, *1*, *0*. Do wyznaczenia więc spółczynników σ_i mamy według §. 2-go:

$$\sigma_1 = \sqrt[4]{1}, \; \sigma_2 = \sqrt{-1}, \; \sigma_3 = \sqrt[3]{-1}, \; \sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3 = 1,$$

skąd wynika, że albo

$$\sigma_1 = i, \; \sigma_2 = i, \; \sigma_3 = -1,$$

albo
$$\sigma_1 = -i, \; \sigma_2 = -i, \; \sigma_3 = -1.$$

Biorąc którykolwiek n. p. pierwszy układ tych czynników, otrzymamy podstawienia grupy G w kształcie:

$$\begin{aligned} A_1) \quad & j_1' = i j_1 + i j_2 + p_1 \\ & j_2' = \qquad i j_2 + q_1, \\ A_2) \quad & j_1' = -i j_2 + p_2 \\ & j_2' = \; i j_1 + q_2, \\ A_3) \quad & j_1' = -j_2 + p_3 \\ & j_2' = j_1 - j_2 + q_3. \end{aligned}$$

Dla uproszczenia przyjmijmy nadal, że kraniec niższy $z_0 = J_0 = -\infty$, a więc odpowiednio $\omega_0 = i\infty$. Wskutek tego jest

$$p_1 = q_1 = 0,$$

i równania (20) i (21) redukują się do równań:

$$i p_2 + q_3 = 0, \quad i q_2 - p_3 = 0, \quad p_2 - i q_2 = 0.$$

Wszystkie więc stałe p i q zachodzące w podstawieniach A_i można wyrazić przy pomocy jednej z nich, n. p.: p_2. Nadto ponieważ wolno nam jeszcze pomnożyć j_1, j_2 przez czynnik stały, przeto dobierając ten czynnik tak, aby było $p_2 = 1$, otrzymamy ostatecznie podstawienia rodzące grupy G w postaci

$$\begin{aligned} A_1)\quad & j_2' = i j_1 + i j_2 \\ & j_2' = i j_2 \\ A_2)\quad & j_1' = -i j_2 + 1 \\ & j_2' = \ \ i j_1 - 1; \end{aligned} \tag{28}$$

podstawienie zaś A_3 jest już następstwem powyższych.

Wszystkie te rezultaty sprawdzić można łatwo, używając formy (24) funkcyi j_1, j_2 [1]. Nie będziemy się jednak nad tem zastanawiali i zajmiemy się w dalszym ciągu wyprowadzeniem wzorów, o których w poprzedzającym ustępie wspomnieliśmy. Zadanie nasze sformułujemy teraz w ten sposób: używając oznaczeń wynikających z przedstawienia (24') funkcyi j_1, j_2, mamy określić dla danego podstawienia [2]: $\frac{\alpha' \omega + \beta'}{\gamma' \omega + \delta'}$, spółczynniki podstawienia:

$$\begin{aligned} j_1\left(\frac{\alpha' \omega + \beta'}{\gamma' \omega + \delta'}\right) &= \alpha j_1(\omega) + \beta j_2(\omega) + p \\ j_2\left(\frac{\alpha' \omega + \beta'}{\gamma' \omega + \delta'}\right) &= \gamma j_1(\omega) + \delta j_2(\omega) + q. \end{aligned} \qquad A) \quad (29)$$

---

[1]) Używając formy (24') otrzymamy n. p.: $q_2 = \int_{i\infty}^{0} \omega_2{}^3 \sqrt[4]{\Delta}\, d\omega$, albo, ponieważ

$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \cdot r \prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - r^m)^{24}$, gdzie $r = e^{2\pi i \omega}$, (por. V. ü. Mod. f. str. 154), więc

$$q_2 = -(2\pi)^2 i \int_0^1 r^{-\frac{3}{4}} \Pi (1 - r^m)^6 \, dr;$$

stąd wynika, że q_2 jest liczbą skończoną różną od zera.

[2]) Podobne badania przeprowadził dla całki eliptycznej Fricke: Über die ausgezeich. Untergr. etc. Mat. Ann. Bd. 30, str. 345 i nast.

Z kształtu podstawień rodzących (28) bezpośrednio wynika, że

$$\alpha=i^{\mu}\alpha',\ \beta=i^{\mu}\beta',\ \gamma=i^{\mu}\gamma',\ \delta=i^{\mu}\delta'.$$

Do obliczenia jednak wykładnika μ użyjemy kształtu (24) funkcyi j_1, j_2. Z wyrażeń tych okazuje się, że że i^{μ} jest czynnikiem zjawiającym się przy przekształceniu formy $\sqrt[4]{\Delta}$ za pomocą podstawienia $\omega_1' = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2$, $\omega_2' = \gamma'\omega_1 + \delta'\omega_2$:

$$\sqrt[4]{\Delta(\alpha'\omega_1+\beta'\omega_2,\ \gamma'\omega_1+\delta'\omega_2)}=i^{\mu}\sqrt[4]{\Delta(\omega_1,\ \omega_2)}.$$

Czynnik zaś ten i^{μ} został już kilkakrotnie obliczonym [1]):

(30) $$\mu=\gamma'(1-\alpha'^2)(\alpha'+\delta'+1)+\alpha'^2(1-\alpha'+\alpha'\beta'-\alpha'\gamma') \pmod 4.$$

Tym sposobem mamy dokładnie określone spółczynniki α, β, γ, δ; pozostaje zająć się liczbami p, q.

Podstawiając w równaniach (29) $\omega=i\infty$, otrzymamy [2]):

$$p=j_1\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)$$
$$q=j_2\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right);$$

albo, gdy uwzględnimy części rzeczywiste i urojone:

$$j_k\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)=P_k\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)+i\,Q_k\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right).$$

otrzymamy:

(31) $$p=P_1\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)+i\,Q_1\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)$$
$$q=P_2\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right)+i\,Q_2\left(\tfrac{\alpha}{\gamma}\right).$$

O funkcyach P_k, Q_k wiemy dotąd tylko tyle, że są one funkcyami jednowartościowemi stosunku $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Aby ich dalsze własności wyprowadzić, podstawmy w pierwszym ze wzorów (28), który napiszemy w postaci

$$A_1)\quad j_1(\omega+1)=i\,j_1(\omega)+i\,j_2(\omega)$$
$$j_2(\omega+1)=i\,j_2(\omega),$$

zamiast ω wyrażenie $\dfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\beta}$; wówczas otrzymamy:

$$j_1\left(\frac{(\alpha+\gamma)\omega+(\beta+\delta)}{\gamma\omega+\delta}\right)=i\,j_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)+i\,j_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$$

$$j_2\left(\frac{(\alpha+\gamma)\omega+(\beta+\delta)}{\gamma\omega+\delta}\right)=i\,j_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right).$$

---

[1]) Vorl. ü. Modf. str. 627.

[2]) Dla uproszczenia opuszczamy nadal kreski przy liczbach $\alpha, \ldots, \delta$ i kreskę ułamkową, pisząc $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ zamiast $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Kładąc tutaj $\omega = i\infty$, mieć będziemy równania

$$j_1\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = i j_1\binom{\alpha}{\gamma} + i j_2\binom{\alpha}{\gamma}$$
$$j_2\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = i j_2\binom{\alpha}{\gamma},$$

skąd przy uwzględnieniu wyrażeń (31) wynika:

$$P_1\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = -P_2\binom{\alpha}{\gamma} - Q_2\binom{\alpha}{\gamma};\quad P_2\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = P_1\binom{\alpha}{\gamma} + Q_1\binom{\alpha}{\gamma} \tag{32}$$
$$Q_1\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = -Q_2\binom{\alpha}{\gamma} \qquad Q_2\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = Q_1\binom{\alpha}{\gamma}.$$

Kładąc w dwu ostatnich związkach α zamiast $\alpha+\gamma$, otrzymamy

$$P_2\binom{\alpha}{\gamma} = P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} \tag{33}$$
$$Q_2\binom{\alpha}{\gamma} = Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Mamy zatem na mocy równań (29):

$$j_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = i^\mu\,\alpha j_1 + i^\mu\,\beta j_2 + P_1\binom{\alpha}{\gamma} + i\left[P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}\right]$$
$$j_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = i^\mu\,\gamma j_1 + i^\mu\,\delta j_2 + Q_1\binom{\alpha}{\gamma} + i\,Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} \tag{34}$$

Jak widzimy, wystarczy ograniczyć się do badania funkcyi P_1 i Q_1. Podstawiając wyrażenia (33) w (32) otrzymamy dla tych funkcyi pierwszą parę wzorów:

$$P_1\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = -P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - 2Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} \tag{35}$$
$$Q_1\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = -Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Inną parę wzorów otrzymamy, wychodząc z podstawienia

$$A_2)\quad j_1\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) = -i j_1(\omega) + 1$$
$$j_2\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) = i j_2(\omega) - i.$$

Podstawiając tu mianowicie za ω wyrażenie $\dfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\beta}$ i postępując podobnie jak poprzednio, dojdziemy do równań

$$P_1\binom{-\gamma}{\alpha} = Q_2\binom{\alpha}{\gamma} + 1$$
$$Q_1\binom{-\gamma}{\alpha} = -P_2\binom{\alpha}{\gamma},$$

z których na mocy (33), otrzymamy wzory:

$$P_1\binom{-\gamma}{\alpha} = Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + 1 \tag{36}$$
$$Q_1\binom{-\gamma}{\alpha} = -P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Wzory te jednak nie wystarczają jeszcze do obliczania kolejnego wielkości $P_1\binom{\alpha}{\gamma}$, $Q_1\binom{\alpha}{\gamma}$. Brakuje nam mianowicie związków łączących wprost

wyrażenia $P_1\binom{-\alpha}{\gamma}$, $Q_1\binom{-\alpha}{\gamma}$ z wyrażeniami $P\binom{\alpha}{\gamma}$, $Q\binom{\alpha}{\gamma}$. Aby je otrzymać, użyjemy podstawienia (28):

$$B')\ \omega' = \frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}.$$

Zauważymy naprzód, że na mocy równań (34) mamy:

$$j_1\left(\frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}\right) = -i^{\mu}\alpha j_1(\omega)+i^{\mu}\beta j_2(\omega)+P_1\binom{-\alpha}{\gamma}+i[P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}+Q_1\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma} \tag{37}$$

$$j_1\left(\frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}\right) = i^{\mu}\gamma j_1(\omega)-i^{\mu}\delta j_2(\omega)+Q_1\binom{-\alpha}{\gamma}+iQ_1\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Nadto dowiedziemy istnienia następujących równości:

$$j_1\left(\frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}\right) = -i^{\mu}\alpha j_1(\omega)+i^{\mu}\beta j_2(\omega)+P_1\binom{\alpha}{\gamma}-i[P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}+Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}]$$

$$j_1\left(\frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}\right) = i^{\mu}\gamma j_1(\omega)-i^{\mu}\delta j_2(\omega)-Q_1\binom{\alpha}{\gamma}+iQ_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}. \tag{38}$$

Jakoż, z kształtu (28) podstawienia B') wynika, że

$$B' = A_1^{-m_1} A_2 \,.\, A_2^{-m_2} A_2 \ldots\ldots A_1^{-m_n}.$$

Przypuszczając więc, że związki (37) mają miejsce dla podstawienia B'), okażemy, że one istnieją także dla każdego innego podstawienia B), jeżeli tylko dowiedziemy ich istnienia jeszcze i dla podstawień:

$$A_1^{-1} B', \quad A_2 B'.$$

Lecz

$$A_1^{-1} B')\ \omega' = \frac{(-\alpha+\gamma)\,\omega+(\beta+\delta)}{\gamma\omega-\delta}$$

$$A_2 B')\ \omega' = \frac{-\gamma\omega+\delta}{-\alpha\omega+\beta},$$

zatem na mocy związków (34):

$$j_1(A_1^{-1} B') = i^{\mu_1}\alpha_1 j_1 + i^{\mu_1}\beta_1 j_2 + P_1\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma}+i[P_1\binom{\alpha-2\gamma}{\gamma}+Q_1\binom{\alpha-2\gamma}{\gamma}]$$

$$j_2(A_1^{-1} B') = i^{\mu_1}\gamma_1 j_1 + i^{\mu_1}\delta_1 j_2 + Q_1\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma}+iQ_1\binom{\alpha-2\gamma}{\gamma},$$

a

$$j_1(A_2 B') = i^{\mu_2}\alpha_2 j_1 + i^{\mu_2}\beta_2 j_2 + P_1\binom{\gamma}{\alpha}+i[P_1\binom{-\gamma+\alpha}{\alpha}+Q_1\binom{-\gamma+\alpha}{\alpha}]$$

$$j_2(A_2 B') = i^{\mu_2}\gamma_2 j_1 + i^{\mu_2}\delta_2 j_2 + Q_1\binom{\gamma}{\alpha}+iQ_1\binom{-\gamma+\alpha}{\alpha}.$$

Z drugiej zaś strony, podstawiając w równaniach (28) wyrażenie $\frac{-\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\delta}$ zamiast ω, otrzymamy:

$$j_1(A_1^{-1}B') = i^{\mu_1}\alpha_1 j_1 + i^{\mu_1}\beta_1 j_2 + \left[-P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - 2\,Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}\right] + i\left[-P_1\binom{\alpha}{\gamma} - Q_1\binom{\alpha}{\gamma}\right]$$
$$j_2(A_1^{-1}B') = i^{\mu_1}\gamma_1 j_1 + i^{\mu_1}\delta_1 j_2 + Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + i\,Q_1\binom{\alpha}{\gamma}$$

a

$$j_1(A_2B') = i^{\mu_2}\alpha_2 j_1 + i^{\mu_2}\beta_2 j_2 + \left[Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + 1\right] + i\,Q_1\binom{\alpha}{\gamma}$$
$$j_2(A_2B') = i^{\mu_2}\gamma_2 j_1 + i^{\mu_2}\delta_2 j_2 + \left[P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}\right] + i\left[P_2\binom{\alpha}{\gamma} - 1\right].$$

Porównywając. dwie pary ostatnich związków z odpowiednimi poprzedzającymi, otrzymamy równości:

$$P_1\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma} = -P_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + 2\,Q_1\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}$$
$$P_2\binom{-\alpha-2\gamma}{\gamma} + Q_1\binom{-\alpha-2\gamma}{\gamma} = -P_1\binom{\alpha}{\gamma} + Q_1\binom{\alpha}{\gamma}$$

i t. d.

Równości zaś te nietrudno sprawdzić przy pomocy wzorów (35), (36) i nowych wzorów:

$$P_1\binom{\alpha}{\gamma} = P_1\binom{-a}{\gamma} \qquad (39)$$
$$Q_1\binom{\alpha}{\gamma} - - Q_1\binom{-\alpha}{\gamma}$$

które otrzymujemy wprost z porównania związków (37) i (38).

Jeżeli zatem jeszcze zważymy, że

$$P_1\binom{1}{0} = 0, \quad Q_1\binom{1}{0} = 0, \qquad (40)$$

to możemy powiedzieć: Układ wzorów: (30), (35), (36), (39) i (40), służy do bezpośredniego stopniowego obliczenia spółczynników podstawienia A) (29).

Korzystając z rozwinięcia podstawienia A na ułamek ciągły (26) i używając symbolu Legendrea, można łatwo otrzymać o wiele prostsze wyrażenia wielkości P_1 i Q_1.

W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia,

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\delta_{n-k}} = m_0 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{m_2 - \ddots - \cfrac{1}{m_{n-k}}}},$$

tak iż n. p. $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = \frac{\alpha_{n-1}\omega+\alpha_n}{\gamma_{n-1}\omega+\gamma_n} = m_0 - \cfrac{1}{m_1 - \ddots - \cfrac{1}{m_n+\omega}}.$$

Z przedstawienia tego wprost wynika, że wykładnik

$$\mu = \mu_n = n + \sum_{i=o}^{i=n} m_i.$$

Podstawiając te wyrażenia w równania (29) i kładąc w nich następnie $\omega = i\,o$, otrzymamy:

$$(41)\quad \begin{aligned} P_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n} + iP_2\binom{\alpha_n}{\gamma_n} &= i^{\mu_n}(\alpha_{n-1} - i\,\alpha_n) + P_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} + iP_2\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \\ Q_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n} + iQ_2\binom{\alpha_n}{\gamma_n} &= i^{\mu_n}(\gamma_{n-1} - i\,\gamma_n) + Q_1\binom{\alpha_{u-1}}{\gamma_{n-1}} + iQ_2\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy jeszcze symbol Legendrea

$$\left(\frac{\mu}{4}\right) = \pm 1$$

z tym zastrzeżeniem, że gdy μ jest liczbą parzystą, to

$$\left(\frac{\mu}{4}\right) = 0.$$

Wówczas można, jak nietrudno sprawdzić, każdą potęgę i^{μ_k} przedstawić za pomocą wzoru:

$$i^{\mu_k} = \left(\frac{\mu_k + 1}{4}\right) + i\left(\frac{\mu_k}{4}\right).$$

Podstawiając to wyrażenie w równaniach (41) mieć będziemy:

$$(42)\quad \begin{aligned} P_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n} &= \left(\frac{\mu_n + 1}{4}\right)\alpha_{n-1} + \left(\frac{\mu_u}{4}\right)\alpha_n + P_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \\ Q_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n} &= \left(\frac{\mu_n + 1}{4}\right)\gamma_{n-1} + \left(\frac{\mu_n}{4}\right)\gamma_n + Q_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \end{aligned}$$

Jeżeli w te równania wprowadzimy zamiast n, kolejno n, $n-1, \ldots 2, 1$, mieć będziemy:

$$P_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n} = \left(\frac{\mu_n + 1}{4}\right)\alpha_{n-1} + \left(\frac{\mu_n}{4}\right)\alpha_n + P_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$$

$$P_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \left(\frac{\mu_{n-1} + 1}{4}\right)\alpha_{n-2} + \left(\frac{\mu_{n-1}}{4}\right)\alpha_{n-1} + P_1\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$$

. . . .

$$P_1\binom{\alpha_1}{\gamma_1} = \left(\frac{\mu_1 + 1}{4}\right)\alpha_0 + \left(\frac{\mu_1}{4}\right)\alpha_1 + P_1\binom{\alpha_0}{\gamma_0},$$

nakoniec

$$P_1\binom{\alpha_0}{\gamma_0}=\left(\frac{\mu_0+1}{4}\right)+\left(\frac{\mu_0}{4}\right)\alpha_0,\ ^{1})$$

skąd

$$P_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n}=\left(\frac{\mu_0+1}{4}\right)+\left(\frac{\mu_n}{4}\right)\alpha_n+\sum_{i=o}^{i=n-1}\alpha_i\left[\left(\frac{\mu_i}{4}\right)+\left(\frac{\mu_i+1}{4}\right)\right]. \tag{43}$$

Podobnie postępując z drugiem równaniem (42), otrzymamy:

$$Q_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n}=\left(\frac{\mu_n}{4}\right)\gamma_n+\sum_{i=o}^{i=n-1}\gamma_i\left[\left(\frac{\mu_i}{4}\right)+\left(\frac{\mu_i+1}{4}\right)\right]. \tag{43*}$$

Wzory te znacznie się jeszcze upraszczają, jeżeli mianowniki m_i, ułamka ciągłego 26) są liczbami nieparzystemi. Wówczas bowiem także μ_i są liczbami nieparzystemi, a więc według umowy $\left(\frac{\mu_1+1}{4}\right)=0$, wzory (43) redukują się do:

$$P_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n}=\sum_{i=o}^{i=n}\alpha_i\cdot\left(\frac{\mu_i}{4}\right)$$

$$Q_1\binom{\alpha_n}{\gamma_n}=\sum_{i=o}^{i=n}\gamma_i\cdot\left(\frac{\mu_i}{4}\right).$$

ROZDZIAŁ III.

Funkcye gatunku 3-go.

§. 1.

W rozdziale tym zajmiemy się pewnemi funkcyami przestępnemi, które przedstawimy przy pomocy rozwiązań równań różniczkowych

---

[1]) Ostatnia ta równość nie wynika wprawdzie z (42), lecz łatwo ją otrzymamy uciekając się do wzorów (29) i podstawiając w nich $\alpha=1$, $\beta=\alpha_0=m_0=\mu_0$, $\gamma=0$, $\delta=\gamma_0=1$. Otrzymamy mianowicie równości:

$$j_1(\omega+\alpha_0)=i^{\mu_0}j_1(\omega)+i^{\mu_0}\alpha_0 j_2(\omega)$$
$$j_2(\omega+\alpha_0)=i^{\mu_0}j_2(\omega).$$

Podstawiając w nich $\omega=i0$ i pamiętając, że $j_1(0)=1$, $j_2(0)=-i$, otrzymamy

$$P_1\binom{\alpha_0}{\gamma_0}=\left(\frac{\mu_0+1}{4}\right)+\left(\frac{\mu_0}{4}\right)\alpha_0$$

$$Q_1\binom{\alpha_0}{\gamma_0}=\left(\frac{\mu_0}{4}\right).$$

rzędu 2-go, na wzór całek Abelowych gatunku trzeciego. Jak wiadomo, te ostatnie funkcye zależą od pary lub raczej od dwu par zmiennych niezależnych: x, y; ξ, η, z których jedna para nosi nazwę argumentów, pozostała nazwę parametrów. Całki te tem się odznaczają, że posiadają punkty logarytmiczne i pozostają niezmiennemi przy wzajemnej „przemianie argumentów i parametrów“.

Odkrycia tej ostatniej, ważnej własności dla całki eliptycznej gatunku trzeciego dokonał Legendre.

Wychodząc z równań jednorodnych rzędu 2-go i wyższych uogólnił tę własność Abel [1]) także dla wyższych funkcyi przestępnych; rezultaty zaś Abela podał Jacobi w rozprawie: „Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten“ [2]) w formie bardzo uproszczonej.

Przy pewnych założeniach prowadzą [3]), jak zobaczymy, równania różniczkowe rzędu pierwszego do całek gatunku trzeciego algebraicznych, a mianowicie hypereliptycznych. Funkcye te stanowiły przedmiot licznych i doniosłych badań (n. p. Weierstrassa, Kleina i innych) a twierdzenie „o przemianie parametrów i argumentów“ występowało w rozmaitych formach. Lecz dopiero Klein [4]) ujął powyższe funkcye w formę prostą całki podwójnej, z której naprzód owo twierdzenie o przemianie parametrów i argumentów bezpośrednio można odczytać; powtóre całka hypereliptyczna posiada w tym kształcie własność niezmiennika względem podstawień liniowych wykonywanych na zmiennych niezależnych; a nareszcie, badanie własności takiej całki w oddzielnych punktach i przy zmianie zmiennych jest stosunkowo bardzo proste.

Natomiast niewiele zajmowano się od czasów Jacobiego funkcyami analogicznemi należącemi do równań rzędów wyższych. O ile mi wiadomo, istnieją tylko dwie prace odnoszące się do tego przedmiotu, mianowicie praca Fuchsa, w której autor zajmuje się pewnymi związkami

---

[1]) Abel: Sur une propriété remarquable d'une classe tres étendue de fonctions transcendantes (Ouevres compl., Christiania, 1881; t. II; IX). Extension de la theorie précédante; X (tamże).

[2]) Journal Crella t. 32, str. 185 i nast.

[3]) Na tę okoliczność zwrócił uwagę już Jacobi w przyt. rozpr. str. 189.

[4]) Klein: Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen; Math. Ann. Bd. 27; p. 443 i nast.; Bd. 32 p. 352. Zob. także Burkhardt. Beitraege zur Theorie der hyper. Sigmafunct. p. 382—400.

dwuliniowymi między całkami równań [1]) i praca Frobeniusa [2]) w tomie 78-ym dziennika Crelle'a. W tej rozprawie przedstawia Frobenius rezultaty Abela i Jacobiego przy pomocy rozwiązań pewnych równań różniczkowych zwyczajnych liniowych i niejednorodnych.

Wspomnieliśmy tu o dwóch ostatnich pracach, aby zaznaczyć ich charakter, choć obecnie niewiele z nich korzystać będziemy; natomiast oprzemy nasze rozumowanie na pracach Jacobiego i Kleina poprzednio wzmiankowanych.

§. 2.

Wraz z Jacobim weźmiemy na uwagę pary równań różniczkowych, zwanych równaniami sprzężonemi (equ. adjointes; adjungirte Diffgl.).

Jeżeli ogólnie przez

$$A_z(y) = A_0\, y + A_1\, y' + A_2\, y'' + \ldots + A_m\, y^{(m)} = 0 \qquad (1)$$

oznaczymy równanie różniczkowe rzędu m-go, to równanie sprzężone mieć będzie kształt:

$$\begin{aligned} B_z(Y) &= B_0\, Y + B_1\, Y' + B_2\, Y'' + \ldots + B_m Y^{(m)} = 0 \qquad (2)\\ &= -A_0\, Y + (A_1\, Y)' - (A_2\, Y)'' + \ldots + (-1)^{m+1} (A_m\, Y)^{(m)} = 0, \end{aligned}$$

tak, iż

$$\left.\begin{aligned} B &= -A_0 + A_1' - A_2'' + \ldots \\ B_1 &= A_1 - 2A'_2 + 3A_3'' + \ldots \\ B_2 &= -A_2 + 3A'_3 - \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_m &= (-1)^{m+1} A_m. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Jeżeli całki równania (1) tworzące układ zasadniczy nazwiemy $y_1, y_2, \ldots y_m$, to główna własność równania sprzężonego polega na tem, że jego całki zasadnicze Y_1, $Y_2 \ldots Y_m$ czynią zadość:

---

[1]) Fuchs: Ueber Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgl. stattfinden. Crelle's Jour. Bd. 76, str. 177 i nast.

[2]) Frobenius: Über die Vertauschung von Arg. und Par. in den Integr. der lin. Diffgl. Crelle's J. 78; p. 93—96:

$$Y_1 : Y_2 : \ldots Y_m = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \ldots & y_m \\ y'_2 & y'_3 & \ldots & y'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_2^{(m-2)} & y_3^{(m-2)} & \ldots & y_m^{(m-2)} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} y_1, & y_3 & \ldots & y_m \\ y'_1, & y'_3 & \ldots & y'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-2)} & y_3^{(m-2)} & \ldots & y_m^{(m-2)} \end{vmatrix} : \ldots$$

$$\ldots : \pm \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & \ldots & y_{m-1} \\ y'_1 & y'_3 & \ldots & y'_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-2)} & y_3^{(m-2)} & \ldots & y_{m-1}^{(m-2)} \end{vmatrix};$$

geometrycznie znaczy to: jeżeli $y_1, y_2, \ldots y_m$ przedstawiają spółrzędne jednorodne punktu linii krzywej w przestrzeni $(m-1)$ wymiarowej, to $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ przedstawiają spółrzędne płaszczyzny ściśle stycznej do tejże krzywej.

Zachowanie się całek $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ rozważał szczegółowiej Fuchs w wyżej przytoczonej pracy [1]). Okazało się mianowicie, że:

a) jeżeli równanie (1) należy do równań klasy Fuchsa (por. §. 1 Rozd. I), a więc A_i są pewnymi wielomianami całkowitymi, to również równanie sprzężone do tejże klasy należy; nadto

b) równanie sprzężone posiada też same punkty osobliwe, co równanie dane; oraz

c) jeżeli przez k oznaczymy wykładnik punktu osobliwego w odległości skończonej równania (1), to $l = -1 - k$ jest wykładnikiem należącym do punktu osobliwego równania sprzężonego. W punkcie zaś $z = \infty$ wykładnikowi k odpowiada wykładnik $l = m(n-1) - k + 1$, gdzie n oznacza ilość punktów osobliwych w odległości skończonej.

Stosując te twierdzenia do równań rzędu 1-go i 2-go (do których się nadal ograniczymy), wprost wniesiemy, że: całki równania sprzężonego różnią się tylko czynnikiem spólnym K od całek równania danego.

Dla równań rzędu 1-go obliczymy bez trudności:

$$K = A_1, \quad \text{a więc } Y = A_1 y.$$

Aby zaś znaleźć czynnik K dla równań rzędu 2 go:

$$Y_1 = K y_2, \quad Y_2 = -K y_1,$$

zważymy, że wykładnikami równania sprzężonego (2) w pukcie l_i są:

$$l'_i = -1 - k'_i, \quad l''_i = -1 - k''_i;$$

jeżeli nadto przyjmiemy, że punkt $z = \infty$ jest dla równania (1) punktem zwyczajnym, [co, jak widzieliśmy (w §. 1, R. I), nie jest istotnem ogra-

[1]) Por. Crelles Jour. T. 6 str. 183 i nast.

niczeniem], t. j. jeżeli przyjmiemy $k' = 0$, $k'' = 1$, to według powyższego:

$$l' = 2(n-1) + 1,\ l'' = 2(n-1).$$

Stąd więc wynika, że funkcya K powinna w okolicy każdego z punktów osobliwych e_i zachowywać się jak $(z - e_i)^{l-k_i'-k_i''}$, a w okolicy $z = \infty$ jak $\left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2}$. Zważając jeszcze na to, iż zgodnie z powyższemi założeniami jest $\sum_{i=1}^{i=n} (k_i' + k_i'') = n - 2$ (por. równ. 8 Rozd. I), łatwo dostrzedz, że tym warunkom czyni zadość iloczyn:

$$K = \prod_{i=1}^{i=n} (z - e_i)^{-1-k_i'-k_i''}. \tag{4}$$

Na szczególną uwagę zasługują równania (1) same z sobą sprzężone; dla takich równań jest według (3)

$$B_i = (-1)^{m+1} A_i. \tag{5}$$

Rozważmy teraz po kolei równania rzędu 1-go i 2go.

Z warunku (5) wynika, że równania rzędu 1-go są same z sobą sprzężone, jeżeli

$$A_0 = \frac{A_1'}{2},$$

tak, iż mają kształt:

$$A_1 y' + \frac{1}{2} A_1' y = 0. \tag{6}$$

Całką tego równania jest:

$$y = \frac{1}{\sqrt{A_1}}. \tag{7}$$

Stąd się okazuje, że, jeżeli A_1 jest wielomianem stopnia nieparzystego, to także punkt $z = \infty$ jest dla funkcyi y punktem osobliwym, a mianowicie punktem rozgałęzienia. Nie naruszymy więc ogólności, jeżeli przyjmiemy nadal, że taki punkt znajduje się w odległości skończonej [1]), t. j. jeżeli założymy, że wielomian A_1 jest stopnia parzystego:

$$A_1 = f_{2n}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{2n} z^{2n}. \tag{8}$$

---

[1]) Punkt taki przenieść można z odległości nieskończonej do punktu dowolnego zapomocą podstawienia $z = \frac{az+b}{cz+d}$ (por. §. 1. Rozd. I).

Nader prostą postać równania (6) otrzymamy, wprowadzając zamiast z zmienne jednorodne z_1, z_2, $(z = \frac{z_1}{z_2})$ i podstawiając wskutek tego zamiast A_1 i y formy wymiarów odpowiednio $2n$-go i $(-n)$go-

(8′) $$\varphi_{2n}(z_1, z_2) = z_2^{2n} f_{2n}(z); \quad y_{-n}(z_1, z_2) = z_2^{-n} y(z).$$

Jakoż, korzystając z twierdzenia Eulera

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_2} z_2 = \mu \varphi_\mu,$$

mieć będziemy:

$$A_1 = \frac{z_2^{-2n}}{2n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} z_2 \right), \quad A_1' = z_2^{-2n+2} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \text{ i t. d.}$$

tak, że równanie (6) same z sobą sprzężone przybierze kształt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial z_1} & \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_{-n}}{\partial z_1} & \frac{\partial y_{-n}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = 0;$$

używając symbolu znanego w teoryi niezmienników [1]), a oznaczającego pierwsze sprowadzenie formy jednej na drugą (Überschiebung e. F. a. e. a.) możemy to równanie napisać jeszcze w postaci: [2])

(6′) $$(\varphi_{2n}, y_{-n})_1 = 0.$$

Z równości (5) wynika, że równanie rzędu 2-go jest same z sobą sprzężone, jeżeli $A_1 = A_2'$, tak, iż to równanie ma kształt:

(9) $$A_2 y'' + A_2' y' + A_0 y = 0.$$

Wówczas spółczynnik p równania (7) (Rozd. I) ma postać:

$$p = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1 - k_i' - k_i''}{z - e_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2}{z - e_i}$$

a więc równanie jest same z sobą sprzężone, jeżeli dla każdego punktu osobliwego e_i:

$$k_i' + k_i'' = -1.$$

---

[1]) Por. Clebsch: Binäre Formen str. 99.

[2]) Kształt ten równania samego z sobą sprzężonego, rzędu 1-go i wyższych otrzymał, o ile mi wiadomo, pierwszy Hirsch w rozprawie inauguralnej: Zur Theorie der linearen Differentialgleichung., Królewiec 1892.

Twierdzimy dalej, że przy danych różnicach wykładników

$$k_i' - k_i'' = \lambda_i .$$

zawsze można znaleźć równanie same z sobą sprzężone. Jakoż, zważmy, że jeżeli w jakiemkolwiek równaniu danem (7, R. I) podstawimy:

$$y = Y\,\Pi\,(z-e_i)^{\frac{1+k_i'+k_i''}{2}},$$

to równanie nowo otrzymane posiadać będzie w punktach osobliwych wykładniki

$$l_i' = \frac{k_i' - k_i'' - 1}{2}$$

$$l_i'' = \frac{-k_i' + k_i'' - 1}{2}$$

których suma: $l_i' + l_i'' = -1$. C. b. d. o.

Nadto, z uwagi, że w równaniu danem (7, R. I) punkt $z = \infty$ jest punktem zwyczajnym, t. j. posiada wykładniki 0, 1, wynika, że równanie z sobą samem sprzężone, z danego otrzymane, mieć będzie w tym punkcie wykładniki:

$$l_i' = n-1, \quad l_i'' = n,$$

tak, iż to równanie (por. rów. 6, Rozd. I) mieć będzie kształt:

$$y'' + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{z-e_i}\,y' + \Big[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i' l''}{z-e_i}\,(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_n) + n(n-1)\,z^{n-2} - \qquad (9')$$

$$-(n-1)(n-2)\sum_{i=1}^{i=n} e_i + Az^{n-4} + Bz^{n-5} + \ldots + N\Big]\frac{y}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-e_i)} = 0.$$

Tego wyszczególniania punktu $z = \infty$ możemy uniknąć, jeżeli, podobnie jak w poprzedzającym przypadku, wprowadzimy zamiast z zmienne jednorodne: $z = \frac{z_1}{z_2}$ i całki y_1, y_2 uważać będziemy jako formy wymiaru $(-n+1)$-go: $y_{-n+1}(z_1, z_2) = z_2^{-n+1}\,y(z)$. Widoczna bowiem, że wówczas wykładniki punktu $z = \infty$ (czyli $z_2 = 0$) redukują się do liczb 0, 1, tak, iż w istocie punkt $z_2 = 0$ przybiera charakter punktu zwyczajnego. Aby znaleźć kształt tego równania, (posiadającego teraz tylko n punktów osobliwych e_i) podstawmy w (9) obok:

$y = z_2^{n-1}\,y_{-n+1}$ wyrażenia:

(10)
$$A_2 = f_n(z)^2 = f_{2n}(z) = a_0 + a_1 + \dots + a_{2n} z^{2n} = z_2^{-2n} \varphi_{2n}(z_1, z_2),$$
$$A_0 = g_{2n-2}(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n-2} z^{2n-2}.$$

Nadto zważmy, że według (9′) jest $c_{2n-2} = n(n-1)a_{2n}$, $c_{2n-3} = (n-1)(n-2)a_{2n-3}$; możemy więc spółczynnik A_0 przedstawić także w postaci:

$$A_0 = \frac{n-1}{2.2n-1} \frac{d^2 A_2}{dz^2} + h_{2n-4}(z), \text{ gdzie } h_{2n-4}(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots +$$

(10)
$$+ b_{2n-4} z^{2n-4} = \frac{z^{-2n+4}}{2n.2n-1} \psi_{2n-4}(z_1, z_2).$$

Postępując podobnie jak przy równaniach rzędu 1-go, otrzymamy równanie same z sobą sprzężone w kształcie

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} \frac{\partial^2 y}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z_2^2} \right] + \psi y = 0,$$

albo — używając symbolu $(\ )_2$ oznaczającego drugie s p r o w a d z e n i e (Überschiebung) formy jednej na inną — w kształcie

(9″)
$$(\varphi_{2n}, y_{-n+1})_2 + \psi_{2n-1} y_{-n+1} = 0.$$

Na tych równaniach (6) i (9) oprzemy budowę wspomnianej w §. 1-ym funkcyi. Zaznaczamy jeszcze, że będziemy używali przeważnie formy niejednorodnej, otrzymane zaś rezultaty nietrudno nam będzie przedstawić w formie jednorodnej.

§. 3.

Na stronie 190 i nast. tomu 32 dziennika Crelle'a rozważa Jacobi funkcyę dwu zmiennych z, ζ całkowitą, utworzoną przy pomocy spółczynników równania (1) w sposób następujący.

Umówmy się, aby nadal wszystkie zachodzące w przyszłości funkcye zmiennej z oznaczać literami greckiemi, kiedy w nich zamiast z podstawimy ζ. Wówczas funkcya Jacobiego przedstawi się za pomocą wyrażenia:

(11)
$$U = -\frac{A_0 - \mathrm{A}_0}{z - \zeta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{A_1 - \mathrm{A}_1}{z - \zeta} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{A_2 - \mathrm{A}_2}{z - \zeta} + \dots = \sum_m \sum_n c_{mn} z^m \zeta^n,$$

albo:

$$U = \frac{A_0 + B_0}{z-\zeta} + 1 \cdot \frac{A_1 - B_1}{(z-\zeta)^2} + 1 \cdot 2 \frac{A_2 + B_2}{(z-\zeta)^3} + \ldots \qquad (11')$$

Dla równania z sobą samem sprzężonego jest, jak wiadomo, $B_i = \pm A_i$, a więc w tym przypadku jest funkcya U symetrycznie zbudowana względem z i ζ niezmieniająca albo zmieniająca swój znak przy przemianie zmiennych z i ζ. Korzystając z rozmaitych rozkładów (11) funkcyi U, otrzymamy pewne tożsamości, które tu stanowić dla nas będą punkt wyjścia.

§. 4.

Poczniemy rzecz od równań rzędu 1-go, gdyż postępowanie, którego tutaj użyjemy z małemi zmianami, stosować się będzie wprost do równań rzędu 2-go.

Ponieważ dla równania rzędu 1-go według §. 2-go jest

$$A_0 = \frac{A'_1}{2} = \frac{f'_{2n}(z)}{2},$$

funkcya więc U (11) ma postać:

$$U = \frac{1}{2} \frac{A'_1 + A'_1}{z-\zeta} - \frac{A_1 - A_1}{(z-\zeta)} = \sum_m \sum_n c_{mn} z^m \zeta^n. \qquad (12)$$

W celu obliczenia spółczynników c_{mn} najprościej jest użyć wyrażenia (11); mianowicie zaś zważając na wyrażenie (8) otrzymamy:

$$\sum_m \sum_n c_{mn} z^m \zeta^n = \Big\{ \frac{a_3}{2} z + a_4 z^2 + \frac{a_5}{2} (3z^3 + z^2 \zeta) + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{2} \Big[(2n-3) z^{2n-3} +$$
$$+ (2n-5) z^{2n-4} \zeta + \ldots \Big] + a_{2n} \Big[(n-1) z^{2n-1} + (n-2) z^{2n-3} \zeta + \ldots \Big] \Big\} -$$
$$- \Big\{ \frac{a_3}{2} \zeta + a_4 \zeta^2 + \frac{a_5}{2} (3\zeta^3 + \zeta^2 z + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{2} \Big[(2n-3) \zeta^{2n-3} +$$
$$+ (2n-5) \zeta^{2n-4} z + \ldots \Big] + a^{2n} \Big[(n-1) \zeta^{2n-2} + (n-2) \zeta^{2n-3} z + \ldots \Big] \Big\}.$$

Oznaczając wyrażenie w pierwszym nawiasie, zawierające składniki $c_{mn} z^m \zeta^n$, gdzie $m \gtrless n$, przez M [a więc według umowy wyra-

żenie w nawiasie drugim przez M] mieć będziemy zamiast (12) tożsamość:

$$\frac{1}{2}\,\frac{A'_1+\mathrm{A}'_1}{z-\zeta}-\frac{A_1-\mathrm{A}_1}{(z-\zeta)^2}=M-\mathrm{M}$$

czyli tożsamość

$$\mathrm{A}_1+\frac{1}{2}\mathrm{A}'_1(z-\zeta)+\mathrm{M}(z-\zeta)^2=A_1+\frac{1}{2}A'_1(\zeta-z)+M(\zeta-z)^2. \quad (13)$$

Z tożsamości tej wynika, że wyrażenie stojące n. p. po lewej stronie znaku równości nie zmienia się wskutek przemiany z sobą zmiennych z, ζ, t. j. że przedstawia funkcyę tych zmiennych symetryczną; oznaczmy ją dla krótkości przez $V(z,\zeta)$. Nazwijmy dalej $F^{(n)}_{(A_1)}(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2)$ n-tą biegunową formy (por. 8'): $\varphi_{2n}(z_1, z_2)=z_2^{2n}f_{2n}(z)$; mianowicie:

$$(14)\quad F(z_1,z_2;\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{2n.(2n-1)\dots(n+1)}\Big[z_2^n\frac{\partial^n\varphi}{\partial z_2^n}+n\,z_2^{n-1}z_1\frac{\partial^n\varphi}{\partial z_2^{n-1}\partial z_1}+ + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^n\varphi}{\partial z_2^{n-2}\partial z_1^2}+\dots\Big],$$

albo w kształcie niejednorodnym:

$$(14')\quad F(z,\zeta)=a_0+a_1(z+\zeta)+\frac{a_2}{2(2n-1)}\Big[(n-1)z^2+2nz\zeta+(n-1)\zeta^2\Big]+ + \frac{a_3}{2.2.(2n-1)}\Big[(n-2)z^3+3nz^2\zeta+3nz\zeta^2+(n-2)\zeta^3\Big]+\dots$$

i rozważmy różnicę:

$$V(z,\zeta)-F(z,\zeta).$$

Ponieważ tak V jak i F są funkcyami symetrycznemi, więc także ich różnica jest funkcyą symetryczną. Dalej zważmy, że na mocy (13) jest dla $z=\zeta$, $V_{z=\zeta}=\mathrm{A}_1$, a według (14') $F_{z=\zeta}=\mathrm{A}_1$, tak, iż

$$[V-F]_{z=\zeta}=0.$$

Nadto nietrudno okazać, że także:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big[V-F\Big]_{z=\zeta}=0.$$

Stąd wynika, że różnica $V-F$ jest podzielna przez $(z-\zeta)^2$, tak, iż

$$(15)\quad V(z,\zeta)=F(z,\zeta)+(z-\zeta)^2\,W(z,\zeta),$$

gdzie $W(z, \zeta)$ jest również funkcyą symetryczną:

$$W(z,\zeta) = -\left[\frac{n-1}{2.(2n-1)}a_2 + \frac{n-2}{2.2.(2n-1)}a_3(z+\zeta) + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{(n-2)(n-3)}{2.2.(2n-1)(2n-3)}(z^2+z\zeta+\zeta^2)+\ldots\right]$$

Mnożąc wyrażenie (15) przez

$$\frac{y \cdot \upsilon}{(z-\zeta)^2}$$

i całkując między krańcami $x, y; \xi, \eta$, otrzymamy funkcyę:

$$P(x,y;\xi,\eta) = \int_y^x\int_\eta^\xi y\upsilon V(z,\zeta)\frac{dz\,d\zeta}{(z-\zeta)^2} = \int_y^x\int_\eta^\xi y\upsilon F(z,\zeta)\frac{dz\,d\zeta}{(z-\zeta)^2} + \tag{17}$$

$$+\int_y^x\int_\eta^\xi y\upsilon \,.\, W(z,\zeta)\,dz\,d\zeta$$

Ponieważ $y = \frac{1}{\sqrt{f_{2n}(z)}}$, funkcya więc P przedstawia całkę hypereliptyczną gatunku 3-go, należącą do powierzchni Riemanna hypereliptycznych (dwuliściowych), rodzaju $p=n-1$. Stąd okazuje się również, że wyraz drugi po stronie prawej przedstawia sumę iloczynów całek gatunku 1-go i 2-go, należących do owej powierzchni; wyraz więc pierwszy po stronie prawej ma wszystkie cechy całki hypereliptycznej 3-go gatunku. Oznaczając go przez Q, otrzymamy kształt całki — różniący się tylko wyrazem

$$\int\int\frac{dz\,d\zeta}{(z-\zeta)^2}$$

od kształtu podanego przez Kleina [1]) — mianowicie kształt:

$$Q(x,y;\xi,\eta) = \int_y^x\int_\eta^\xi y\upsilon F(z,\zeta)\frac{dz\,d\zeta}{(z-\zeta)^2}, \tag{18}$$

albo, używając zmiennych jednorodnych, kształt:

$$Q(x,y;\xi,\eta) = \int_y^x\int_\eta^\xi y_{-n}\upsilon_{-n}F(z_1,z_2;\zeta_1,\zeta_2)\frac{(z\,dz)(\zeta\,d\zeta)}{(z\,\zeta)^2}, \tag{18'}$$

[1]) W wyżej przywiedzionej pracy Mathem. Ann. tom XXVII, str. 443.

gdzie $(z\,dz) = z_1\,dz_2 - z_2\,dz_1$, i t. d., y_{-n} υ_{-n} są formami wymiaru $(-n)$go.

Z kształtów (17) i (18) wprost wynikają pierwsze dwie własności, o których wspomnieliśmy w §. 1-ym, t. j.: własność niezmieniania się funkcyi P i Q wskutek przemiany z sobą argumentów i parametrów, oraz charakter niezmienny funkcyi Q względem podstawień liniowych, wykonywanych na z i ζ.

Aby zaś zbadać zachowanie się funkcyi Q w oddzielnych punktach (z_0, ζ_0) „przestrzeni (z, ζ)“, rozróżnimy następujące przypadki:

a) Jeżeli wartość z_0 jest różna od ζ_0, i tak z_0 jak ζ_0 są różne od e_i, to rozwijając funkcyę, stojącą we wzorze (17) pod znakami f, (nazwijmy ją X), według szeregu Taylora, mieć będziemy:

$$X(z,\zeta) = X(z_0, \zeta_0) + \left[(z - z_0) \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{\substack{z=z_0\\ \zeta=\zeta_0}} + (\zeta - \zeta_0)\left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)_{\substack{z=z_0\\ \zeta=\zeta_0}} \right] + \dots$$

Mnożąc zaś to wyrażenie przez $dz\,d\zeta$ i całkując, otrzymamy rozwinięcie na szereg:

$$Q = \frac{y(z_0)\,\upsilon(\zeta_0)\,F(z_0, \zeta_0)}{(z_0 - \zeta_0)^2}(x-y)(\xi-\eta) + [x - z_0, y - z_0; \xi - \zeta_0, y - \zeta_0],$$

w którym nawias drugi oznacza szereg potęgowy argumentów w nim wyszczególnionych. A więc:
f u n k c y a Q z a c h o w u j e s i ę w p u n k c i e: $z = z_0 \gtrless \zeta = \zeta_0$ j a k f u n k c y a c a ł k o w i t a.

b) Jeżeli $z_0 = \zeta_0 = a$ i $a \gtrless e_i$, to jeszcze funkcya

$$X_1(z, \zeta) = y.\,\upsilon.\,F(z,\zeta)$$

pozwala się rozwinąć na szereg Taylora. W tym celu zważmy, że

$$y(a) = \frac{1}{\sqrt{f(a)}},\ y'(a) = -\frac{f'(a)}{2\,f(a)^{\frac{3}{2}}},\ y'' = -\frac{1}{4}\,\frac{2\,f(a)f''(a) - 3f'^2(a)}{f(a)^{\frac{5}{2}}},\dots,$$

a

$$(19)\qquad \begin{aligned} F_a &= f_{2n}(a),\\ \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_a &= \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right]_a = \frac{1}{2}\,f'(a),\\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right]_a &= \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}\right]_a = \frac{n-1}{2\,.\,2n-1}\,f''(a),\\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \zeta}\right]_a &= \frac{n}{2\,.\,2n-1}\,f''(a),\dots \end{aligned}$$

Uwzględniając te wyrażenia, otrzymamy:

$$[X_1]_a = 1;\ \left[\frac{\partial X_1}{\partial z}\right]_a = \left[\frac{\partial X_1}{\partial \zeta}\right]_a = 0;\ \left[\frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2}\right]_a = -\left[\frac{\partial^2 X_1}{\partial z\,\partial \zeta}\right]_a = \left[\frac{\partial^2 X_1}{\partial \zeta^2}\right]_a =$$

$$= -\frac{2n f f'' - (2n-1) f'^2}{2 . 2n-1 f^2};\ \text{i t. d.,}$$

tak, iż:

$$X_1(z, \zeta) = 1 - \frac{2n f f'' - (2n-1) f'^2}{2 . 2n-1 . f^2} (z-\zeta)^2 + \dots;$$

stąd

$$Q = \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} - \frac{2n f f'' - (2n-1) f'^2}{2 . 2n-1 . f^2} (x-y)(\xi-\eta) + \dots$$

A więc: funkcya Q zachowuje się w okolicy punktu $z_0 = \zeta_0 = a \gtrless e_i$ jak logarytm stosunku podwójnego podziału różnic między argumentami i parametrami.

c) Jeżeli jedna ze zmiennych, n. p. ξ, robi obieg około punktu osobliwego e_i, to tylko υ zmienia swój znak i nie bacząc na stałą całkowania, mieć będziemy:

$$\overline{Q} = -\log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} + \frac{2n f f'' - (2n-1) f'^2}{2 . 2n-1 . f^2} (x-y)(\xi-\eta) + \dots$$

d) Wielkiej wagi jest nakoniec badanie funkcyi Q pod względem zachowania się jej przy obiegach zmiennych x, y; ξ, η po drogach zamkniętych, — na powierzchni Riemanna wyżej wspomnianej, — niedających się ściągnąć do jednego punktu. Do tego celu służy, jak wiadomo, rozkład Kleina [1]) funkcyi Q. Taki rozkład łatwo otrzymamy, wychodząc z funkcyi P. Podstawiając w niej mianowicie zamiast V, lewą stronę równania (13) i uwzględniając, że

$$A_1 = \frac{1}{\upsilon^2},\ A_1' = -2\frac{\upsilon'}{\upsilon^3},$$

otrzymamy wyrażenie

$$V = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\upsilon(z-\zeta)} + M;$$

z uwagi zaś, że V jest funkcyą symetryczną zmiennych z i ζ, bezpośrednio wynika inne jej wyrażenie:

$$V = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{y(\zeta - z)} + M.$$

---

[1]) Klein. Burkhardt l. c.

Jeżeli więc jeszcze nazwiemy

$$\mathrm{M}-W(z,\zeta)=\Sigma\, d_{ik}\, z^i\, \zeta^k,$$

gdzie W przedstawia funkcyę (16) i odpowiednio

$$M-W(z,\zeta)=\Sigma\, d_{ik}\, \zeta^i\, z^k,$$

to otrzymamy żądane rozkłady funkcyi Q:

$$Q=\frac{1}{\upsilon}\int\frac{y\,dz}{z-\zeta}+\Sigma_i\,\Sigma_k\, d_{ik}\int z^i y\,dz.\int\zeta^k\upsilon\,d\zeta \tag{21}$$

i

$$Q=\frac{1}{y}\int\frac{\upsilon\,d\zeta}{\zeta-z}+\Sigma_i\,\Sigma_k\, d_{ik}\int\zeta^i\upsilon\,d\zeta.\int z^k y\,dz, \tag{21'}$$

z których pierwszy służy do badania funkcyi Q przy obiegach zmiennej ζ, drugi przy obiegach zmiennej z.

§. 5.

Dla równania rzędu 2-go samego z sobą sprzężonego (9) funkcya Jacobiego U (11) jest określona przez:

$$U=-\frac{A_0-\mathrm{A}_0}{z-\zeta}+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}\,\frac{A_2-\mathrm{A}_2}{z-\zeta}, \tag{22}$$

czyli

$$U=-\frac{A_0-\mathrm{A}_0}{z-\zeta}+\frac{A'_2+\mathrm{A}'_2}{(z-\zeta)^2}-2\,\frac{A_2-\mathrm{A}_2}{(z-\zeta)^3}. \tag{22'}$$

Z wyrażenia (22) okazuje się, że funkcya U jest całkowita i symetryczna. Rozdzielmy ją na dwa składniki M i M:

$$U=\Sigma_m\,\Sigma_n\, c_{mn}\, z^m\,\zeta^n=M+\mathrm{M}, \tag{23}$$

takie, że n. p. M zawiera wyrazy $z^m\,\zeta^n$, w których $m\gtrless n$:

$$M=\frac{a_2}{2}+2a_4\,z+a_5\,(3z^2+2z\zeta)+2a_0\,(2z^3+3z^2\zeta)+\ldots-$$

$$-\left[\frac{c_1}{2}+c_2\,z+c_3\,(z^2+\tfrac{1}{2}\,z\,\zeta)+c_4\,(z^3+z^2\zeta)+c_5\,(z_4+z^3\zeta+\tfrac{1}{2}\,z^2\,\zeta^2)+\;\ldots\right],$$

gdzie a i c są według (10) spółczynnikami wielomianów odpowiednio $A_2=f_{2n}(z)$, $A_0=g_{2n-2}(z)$. Porównywając z sobą wyrażenia (22) i (23), dojdziemy do tożsamości:

$$V(z,\zeta)=\mathrm{A}_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}'_2(z-\zeta)+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}_0(z-\zeta)^2-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}(z-\zeta)^2=A_2+\tfrac{1}{2}A'_2(\zeta-z)+$$

$$+\tfrac{1}{2}\,A_0(\zeta-z)^2-\tfrac{1}{2}\,M(\zeta-z)^3. \tag{24}$$

Z równości tej wynika, że jej lewa strona, którąśmy oznaczyli przez $V(z,\zeta)$, przedstawia również funkcyę całkowitą i symetryczną zmiennych z i ζ. Pierwsze dwa wyrazy tej funkcyi są takież same jak pierwsze dwa wyrazy funkcyi (13). Oznaczając więc, podobnie jak poprzednio, n-tą biegunową wielomianu A_2 przez $F^{(n)}_{(A_2)}$, otrzymamy:

$$V(z,\zeta)=F^{(n)}_{(A_2)}+(z-\zeta)^2\,W(z,\zeta), \tag{25}$$

gdzie $W(z,\zeta)$ jest również funkcyą całkowitą i symetryczną:

$$W(z,\zeta)=\frac{A_2+\frac{1}{2}A_2'(z-\zeta)-F^{(n)}_{(A_2)}}{(z-\zeta)^2}+\tfrac{1}{2}(A_0-M(z-\zeta)). \tag{26}$$

Obliczając początkowe wyrazy tej funkcyi W i podstawiając według (10)

$$c_0=\frac{n-1}{2.2n-1}.2.1a_2+b_0,\; c_1=\frac{n-1}{2.2n-1}3.2a_3+b_1,\; c_2=\frac{n-1}{2.2n-1}4.3.a_4+b_2,..$$

otrzymamy:

$$W(z,\zeta)=\tfrac{1}{2}\left\{b_0+\frac{b_1}{2}(z+\zeta)+b_2 z\zeta-\frac{(n-2)(n-3)}{2.2.2n-1.2n-3}a_4(z-\zeta)+\ldots\right\} \tag{26'}$$

Jak widzimy, początkowe wyrazy w nawiasie przedstawiają początkowe wyrazy $(n-2)$-giej biegunowej wielomianu $h_{2n-4}=b_0+b_1z+..$ (por. 10). Zachodzi więc pytanie, czy przy pomocy tej biegunowej: $F^{(n-2)}_{(h)}$ nie da się funkcya $W(z,\zeta)$ rozłożyć na dwa składniki, podobnie jak powyżej funkcya $V(z,\zeta)$. Okażemy że tak jest w istocie. Jakoż nietrudno sprawdzić, że ułamek stojący po prawej stronie równania (26) otrzymuje dla $\zeta=z$ wartość: $-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F^n_{(A_2)}}{\partial z^2}\right]_{\zeta=z}=-\frac{n-1}{2.2.2n-1}\frac{d^2A_2}{dz^2}$; wskutek tego według (10)

$$[W(z,\zeta)]_{\zeta=z}=\tfrac{1}{2}\left[A_0-\frac{n-1}{2.2n-1}\frac{d^2A_2}{dz^2}\right]=\tfrac{1}{2}h_{2n-4}(z)$$

Również łatwo jest na tej drodze okazać, że

$$\left[\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{\zeta=z}=-\left[\tfrac{1}{6}\frac{\partial^3 F^n_{(A_2)}}{\partial z^3}+M\right]_{\zeta=z}$$

czyli

$$\left[\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{\zeta=z}=\tfrac{1}{4}\frac{dh_{2n-4}(z)}{dz}.$$

Ponieważ zaś z drugiej strony zgodnie z (19) jest

$$[F^{(n-2)}_{(h)}]_{\zeta=z}=h_{2n-4}(z),\quad \left[\frac{\partial F^{(n-2)}_{(h)}}{\partial z}\right]=\tfrac{1}{2}\frac{dh(z)}{dz},$$

więc rzeczywiście

(27) $$W(z,\zeta)=\tfrac{1}{2}F^{(n-2)}_{(h_{2n-4})}(z)+(z-\zeta)^2 X(z,\zeta),$$

gdzie $X(z,\zeta)$ jest funkcyą całkowitą symetryczną zmiennych z,ζ. Podstawiając to wyrażenie w równanie (25) otrzymamy ostatecznie:

(25') $$V(z,\zeta)=F^{(n)}_{(f_{2n})}+\tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 F^{(n-2)}_{(h_{2n-4})}+(z-\zeta)^4 X(z,\zeta).$$

Aby przejść do funkcyi całkowych analogicznych do całek P i Q ustępu poprzedzającego, pomnożymy wyrażenie (25) przez

$$\frac{y_i\, \upsilon_k}{(z-\zeta)^3}dz.d\zeta \ (i,k=1,2)$$

gdzie y_i są rozwiązaniami równania (9) i scałkujemy je między krańcami x, y; ξ, η. Otrzymamy tym sposobem cztery funkcye:

(28) $$P_{ik}(x,y;\ \xi,\eta)=\int_y^x\int_\eta^\xi y_i\,\upsilon_k\, V(z,\zeta)\frac{dz\,.\,d\zeta}{(z-\zeta)^3}$$

Opuszczając wreszcie we funkcyi P_{ik} wyraz ostatni

$$\int\int(z-\zeta)\,y_i\,\upsilon_k\,X(z,\zeta)\,dz\,d\zeta=\Sigma\,\Sigma\,c_{mn}\int z^m\,y_i\,dz.\int\zeta^n\,\upsilon_k\,d\zeta,$$

niezawierający punktów logarytmicznych, otrzymamy funkcye Q_{ik} prostszego kształtu, posiadające też same charakterystyczne własności, co funkcye P_{ik}:

(29) $$Q_{ik}(x,y;\xi,\eta)=\int_y^x\int_\xi^\eta y_i\,\upsilon_k\,[F^{(n)}_{(f_{2n})}+\tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2F^{(n-2)}_{(h_{2n-4})}]\frac{dz\,d\zeta}{(z-\zeta)^3}$$

Wprowadzając zmienne jednorodne możemy te funkcye przedstawić w kształcie:

(29') $$Q_{ik}(x,y;\xi,\eta)=\int_y^x\int_\eta^\xi y_i\,\upsilon_k\,[F^{(n)}_{(\varphi_{2n})}+\tfrac{1}{2}(z\zeta)^2F^{(n-2)}_{(\psi_{2n-4})}]\frac{(z\,dz)(\zeta\,d\zeta)}{(z\,\zeta)^3}$$

gdzie y, υ są formami wymiaru $(-n+1)$-go. Z kształtu tego okazuje się bezpośrednio własność niezmienna funkcyi Q_{ik} względem podstawień liniowych wykonywanych na z i ζ. Lecz przy wzajemnej przemianie zmiennych x, y i ξ, η funkcye Q_{ii} zmieniają znak, funkcya zaś Q_{ik} przy $k\gtrless i$ przechodzi w $-Q_{ik}$; również zachowanie się tych funkcyi w punkcie $z=\zeta$ jest nie tak proste jak funkcyi Q ustępu 4-go. Obie te dalsze własności posiada jednak funkcya $Q=Q_{21}-Q_{12}$:

(30) $$Q(x,y;\xi,\eta)=\int_y^x\int_\eta^\xi\frac{\upsilon_1 y_2-\upsilon_2 y_1}{(z\,\zeta)}\,F^{(n)}_{(\varphi_{2n})}+\tfrac{1}{2}(z\zeta)^2F^{(n-2)}_{(\psi_{2n-4})}]\frac{(z\,dz)(\zeta\,d\zeta)}{(z\zeta)^2}.$$

Jakoż niezmienność tej funkcyi przy wzajemnem przemienianiu argumentów i parametrów jest widoczna. Potrzeba więc tylko rozważyć zachowanie się jej w oddzielnych punktach (z_0, ζ_0) przestrzeni (z, ζ).

Nazywając dla krótkości funkcyę w nawiasie wzoru (30) przez $X(z, \zeta)$, otrzymamy:

a) dla punktu $z = z_0 \gtrless \zeta = \zeta_0 \gtrless e_i$.

$$[Q]_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}} = \left[\frac{\upsilon_1 y_2 - \upsilon_2 y_1}{(z-\zeta)^3} X\right]_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}} (x-y)(\xi-\eta) + \text{Szer. potęg. arg.}$$

$$(x-z_0,\ y-z_0;\ \xi-\zeta_0,\ \eta-\zeta_0);$$

b) dla punktu $z_0 = \zeta_0 = a \gtrless e_i$; rozwijając funkcyę

$$X_1 = (\upsilon_1 y_2 - \upsilon_2 y_1)(F_{(f_{2n})} + \tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_{(h_{2n-4})})$$

na szereg Taylora, podstawiając następnie

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{A_2} = \frac{1}{f_{2n}},\ y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -\frac{f'}{f^2},\ y'_1 y_2'' - y_2' y_1'' = \tag{31}$$

$$= \frac{A_0}{A_2^2} = \frac{\frac{n-1}{2.2n-1} f'' + h}{f^2},\ \text{itd.},$$

mnożąc przez $\frac{dz\, d\zeta}{(z-\zeta)^3}$ i całkując, otrzymamy:

$$Q = \log\frac{(x-\xi)\,y-\eta)}{(x-\eta)\,(y-\xi)} - \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{2nf\,f'' - (2n-1)f'^2}{2\,(2n-1)f^2} - 2\frac{h}{f}\right](x-y)(\xi-\eta) + \dots$$

c) Jeżeli jedna ze zmiennych wykonywa obieg około punktu osobliwego e_i, to wartość Q przedstawiać będzie liniowe połączenie wartości Q_{ik}.

d) Aby wreszcie otrzymać rozkłady funkcyi Q_{ik} i funkcyi Q, któreby nam służyły do badania zachowania się tychże funkcyi przy obiegach zmiennych x, y, ξ, η po drogach zamkniętych na powierzchni Riemanna należącej do funkcyi y_1, y_2, zauważymy, że według (25') i (24) pozwala się

$$X(z, \zeta) = F^{(n)}_{(f_{2n})} + \tfrac{1}{2}(z-\zeta)^2 F^{(n-1)}_{(h_{2n-4})}$$

wyrazić przez

$$X(z, \zeta) = A_2 + \tfrac{1}{2} A'_2 (z-\zeta) + \tfrac{1}{2} A_0 (z-\zeta)^2 + N(z, \xi)(z-\zeta)^3, \tag{32}$$

gdzie $N(z, \zeta)$ jest funkcyą całkowitą: $N = \Sigma_m \Sigma_n z^m \zeta^n$, albo też przez

$$X(z, \zeta) = A_2 + \tfrac{1}{2} A'_2 (\zeta-z)^2 + \tfrac{1}{2} A_0 (\zeta-z)^2 - N(\zeta, z)(\zeta-z)^3. \tag{32'}$$

Otóż, jeżeli wyrażenie $A_2 + \frac{1}{2} A'_2 (z-\zeta) + \frac{1}{2} A_0 (z-\zeta)^2$ pomnożymy przez

$$\frac{y_i \upsilon_k}{(z-\zeta)^3}$$

i zamiast A_2, A_0 podstawimy ich wartości (31), otrzymamy

$$\frac{y_i \upsilon_k}{(z-\zeta)^3}(A_2 + \tfrac{1}{2} A'_2 (z-\zeta) + \tfrac{1}{2} A_0 (z-\zeta)^2) = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\frac{\upsilon'_1}{z-\zeta} - \frac{\upsilon_1}{(z-\zeta)^2}}{(\upsilon_1\upsilon_2' - \upsilon_2\upsilon_1')}\right] y_i \tag{33}$$

Postępując zaś tak samo z wyrażeniem

$$A_2 + \tfrac{1}{2} A_2' (\zeta - z) + \tfrac{1}{2} A_o^2 (\zeta - z)^2,$$

mieć będziemy

$$(33') \qquad \frac{y_1 \upsilon_k}{(z-\zeta)^3} \left(A_2 + \tfrac{1}{2} A_2' (\zeta - z) + \tfrac{1}{2} A_0 (\zeta - z)^2\right) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\dfrac{y_i'}{\zeta - z} - \dfrac{y_i}{(\zeta - z)^2}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \right] \upsilon_k$$

Podstawiając zaś nakoniec te wyrażenia (33), (33′) w równości (32), (32′) i następnie we wzory (29) otrzymamy żądane rozkłady funkcyi Q_{ik}:

$$(34) \qquad Q_{ik} = -\tfrac{1}{2} \int y_i \left[\frac{\dfrac{\upsilon_k'}{z-\zeta} - \dfrac{\upsilon_k}{(z-\zeta)^2}}{\upsilon_1 \upsilon_2' - \upsilon_2 \upsilon_1'} \right] dz + \Sigma_m \Sigma_n c_{mn} \int z^m y_i \, dz \, . \int \zeta^n \upsilon_k \, d\zeta$$

i odpowiednio

$$(34') \qquad Q_{ik} = \tfrac{1}{2} \int y_i \left[\frac{\dfrac{y_k'}{z-\zeta} - \dfrac{y_i}{(z-\zeta)^2}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \right] d\zeta - \Sigma_m \Sigma_n c_{mn} \int \zeta^m \upsilon_i \, dz \, . \int z^n y_k \, dz,$$

przy pomocy których nietrudno również jest otrzymać rozkłady funkcyi Q. Z tych więc rozkładów pierwszy służyć może do badania funkcyi Q przy obiegach zmiennej ζ, drugi przy obiegach zmiennej z.

Do tych wzmianek obecnie się ograniczam, zachowując sobie do innej sposobności bliższe badanie funkcyi Q. Zaznaczę tu tylko jeszcze, że nietrudno uogólnić powyższe rezultaty dla równań rzędów wyższych, oraz, że wychodząc z dopieroco przytoczonych rozkładów, otrzymać można wspomniane w §. 1-ym związki dwuliniowe Fuchsa.